Независимый Московский Университет, Алгебра-2, весна 2016

3

3.1. Рассмотрим категорию точных последовательностей групп

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

с морфизмами, определяемыми коммутативными диаграммами

$$\begin{tikzcd}
 & & E_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon_1"] & E_2 \arrow[d, "\varepsilon_2"] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
1 \arrow[r] & N \arrow[ur, "\iota_1"] \arrow[dr, "\iota_2"'] & & & G \arrow[r] & 1 \\
 & & E_1' \arrow[r, "\varphi'"] & E_2' \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Является ли эта категория группоидом?

3.2. Определите $\mathrm{Ext}^1(\mathsf{C}_2, \mathsf{C}_2)$.

3.3. Определите $\mathrm{Ext}^1(\mathsf{C}_2, \mathsf{C}_3)$.

3.4. С помощью теории расширений групп перечислите все 8-элементные группы.

3.5. Пусть G – произвольная группа. Для точной последовательности G-модулей $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ проведите детальную проверку точности последовательности

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, M') \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, M) \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, M'') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(G, M') \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, M) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, M'')$$

3.6. Пусть группа $\mathsf{C}_2 =: \{1, \sigma)$ действует на поле комплексных чисел сопряжениями: для $z \in \mathbb{C}$ положим $\sigma \cdot z := \overline{z}$. Вычислите группы когомологий $\mathrm{H}^1(\mathsf{C}_2, \mathbb{C})$ и $\mathrm{H}^1(\mathsf{C}_2, \mathbb{C}^\times)$.

3.7. Пусть группа $\mathbb{Z}$ действует на аддитивной группе гладких функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ сдвигами: для $n \in \mathbb{Z}$ и $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ положим $[n \cdot f](x) := f(x - n)$. Тривиальна ли группа $\mathrm{H}^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))$? **Совет.** Рассмотрите дифференцирование как $\mathbb{Z}$-эндоморфизм $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

3.8. Пусть группа $\mathsf{C}_2 =: \{1, \sigma)$ действует на аддитивной группе гладких функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ отражениями: для $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ положим $[\sigma \cdot f](x) := f(-x)$. Тривиальна ли группа $\mathrm{H}^1(\mathsf{C}_2, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))$?

3.9*. Попытайтесь распространить определение группы $\mathrm{H}^1(G, M)$ на случай действия $G \to \mathrm{Aut}(M)$ группы G на *некоммутативной* группе M.

25 февраля, *Г.Б. Шабат*