

7

- 7.1.** Пусть  $p$  – простое число. Рассмотрите действие группы  $C_p$  сдвигами аргументов на векторном пространстве многочленов  $\mathbb{F}_p[x]$ . Найдите в полученном представлении группы  $C_p$  инвариантные конечномерные подпредставления. Все ли подпредставления этих конечномерных подпредставлений дополняемы?
- 7.2.** Приведите пример двух несовпадающих разложений конечномерного представления группы  $C_2$  в сумму неприводимых представлений.
- 7.3.** Постройте вложение  $S_3 \hookrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ .
- 7.4.** Реализовав тетраэдр как стандартный симплекс в  $\mathbb{R}^4$  и рассмотрев его вращения, постройте вложение  $A_4 \hookrightarrow GL_4(\mathbb{R})$ . Разложите полученное представление в сумму неприводимых.
- 7.5.** Пользуясь результатом предыдущей задаче, постройте неприводимое представление  $A_4 \rightarrow GL_3(\mathbb{C})$  и соответствующее ему контрагредиентное представление.
- 7.6.** Реализовав  $S_3$  как группу вращений правильного треугольника, постройте неприводимое представление  $\rho : S_3 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ . Опишите представление  $\rho \uparrow \rho$ .
- 7.7.** Составьте список известных вам соотношений между операциями  $*$ ,  $\oplus$ ,  $\otimes$  и  $\uparrow$  в категории  $\mathbb{k}G - \mathcal{Vec}$ .
- 7.8.** Вычислите характеры представлений групп  $S_3$  и  $A_4$ , построенных в задачах **7.3-7.6**.
- 7.9.** Составьте полный список неприводимых представлений группы  $C_2 \times C_2$  и соответствующую таблицу характеров.
- 7.10.** Какова размерность пространства центральных функций на группе  $A_5$ ?
- 7.11.** Составьте полную таблицу характеров симметрической группы  $S_3$  и диэдральной  $D_4$ .
- 7.12.** Каковы возможные наборы размерностей неприводимых представлений 16-элементных групп?

5 мая, Г.Б. Шабат