

Независимый Московский Университет
ПРОГРАММА
КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
1-й курс 2-й семестр 2015-2016 уч. года
М. Э. Казарян

1. **Изображение кривых, заданных параметрически и неявно.** *Особые и характерные точки. Изображение кривой в окрестности особой точки. Поведение кривой на бесконечности. Асимптоты.*
2. **Дифференцируемость функций нескольких переменных.** *Производная функции по направлению. Примеры функций, имеющих частные производные, но не дифференцируемых. Теорема о равенстве смешанных производных. Производная композиции.*
3. **Формула Тейлора для функции многих переменных.**
4. **Критические точки функций.** *Максимумы, минимумы и седла функций двух переменных. Второй дифференциал (гессиан). Индекс Морса. Лемма Морса.*
5. **Теорема об обратной функции.** *Обратимость отображения и невырожденность матрицы Якоби. Производная обратной функции. Криволинейные координаты в области евклидова пространства.*
6. **Принцип сжимающих отображений.** *Доказательство теоремы об обратной функции.*
7. **Теорема об неявной функции.** *Производная функции, заданной неявно. Гладкие многомерные поверхности в евклидовых пространствах. Эквивалентность разных условий гладкости поверхности. Локальные координаты на поверхности.*
8. **Условные экстремумы.** *Вычисление производной ограничения функции на поверхность. Множители Лагранжа. Индекс Морса ограничения функции на поверхность.*
9. **Типичные особенности отображений поверхности в поверхность.** *Складки и сборки. Огибающие семейства кривых. Эвмота (каустика) плоской кривой и устойчивость ее особых точек.*

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 1 10 февраля 2016 года

Частной производной (обозначение: $\partial f/\partial x_1$) функции $f(x_1, x_2)$ двух аргументов называется обычная производная функции одного аргумента x_1 , получаемой фиксированием какого-либо значения переменной x_2 .

Определение. Функция $f(x_1, x_2)$ называется дифференцируемой в точке $a = (a_1, a_2)$, если она в окрестности этой точки отличается от некоторой линейной функции на члены малого порядка

$$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + A(x_1 - a_1) + B(x_2 - a_2) + o(r), \quad r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}.$$

1. Докажите, что дифференцируемость влечет существование частных производных. Выразите константы A и B через частные производные функции f . (Ответ: $A = \frac{\partial f}{\partial x_1}$; $B = \frac{\partial f}{\partial x_2}$).
2. Постройте примеры, показывающие, что из существования частных производных дифференцируемость вовсе не следует.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая область.

Определение 1. Касательным вектором к M в точке $a \in M$ называется произвольная пара чисел $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Определение 2. Назовем две гладкие кривые $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ и $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ эквивалентными, если они отличаются на члены малого порядка: $x(0) = y(0) = a$, $x_i(t) - y_i(t) = o(t)$. Касательным вектором к M в точке $a \in M$ называется класс эквивалентных кривых.

Определение 3. Дифференцированием в точке $a \in M$ называется линейное соответствие D , сопоставляющее каждой дифференцируемой в точке a функции f число $D(f)$ так, что при этом выполняется равенство (называемое тождеством Лейбница)

$$D(fg) = f(a)D(g) + D(f)g(a)$$

для всяких f, g . Касательным вектором к M в точке $a \in M$ называется произвольное дифференцирование.

3. Докажите эквивалентность определений 1–3 касательного вектора. Укажите прямые соответствия, позволяющие перейти от каждой из трех интерпретаций касательного вектора к любой другой, например:

2)→1): кривой $x(t)$ ставится в соответствие пара чисел $\xi = (x'_1(0), x'_2(0))$.

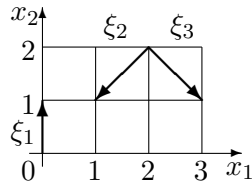
2)→3): По кривой $x(t)$ можно построить дифференцирование D , которое сопоставляет функции f число $f(x(t))' \Big|_{t=0}$ (штрих — производная функции одной переменной, получающейся композицией f и x). Проверьте, что D действительно является дифференцированием.

Касательным пространством в точке a (обозначение: $T_a M$) называется множество всех касательных векторов в этой точке.

4. Покажите, что на $T_a M$ имеется структура векторного пространства. Какова его размерность? Выразите эту структуру (сложение векторов и умножение на числа) в различных интерпретациях касательных векторов.

Дифференциалом df функции f в точке a называется функция на касательном пространстве $df : T_a M \rightarrow \mathbb{R}$. Значение дифференциала на касательном векторе, заданном кривой $x(t)$ равно $f(x(t))' \Big|_{t=0}$.

5. Найдите значения дифференциалов dx_1 , dx_1x_2 , $d(x_1^2 + x_2^2)$ на касательных векторах, изображенных на рисунке.



6. Докажите, что дифференциал — линейная функция на касательном пространстве. Указание: воспользуйтесь (доказав, сперва) следующей формулой суперпозиции: пусть заданы дифференцируемая в точке a функция f двух аргументов и две дифференцируемые функции x_1 , x_2 одного аргумента, такие, что $a = (x_1(0), x_2(0))$. Тогда

$$\frac{d}{dt}f(x_1(t), x_2(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_a x_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_a x_2'(0).$$

Пространство линейных функций на T_aM называется *кокасательным пространством* в точке a и обозначается T_a^*M .

7. Докажите, что дифференциалы координатных функций dx_1 , dx_2 образуют базис в этом пространстве. Разложите по этому базису дифференциал произвольной функции. (Ответ: $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$). Как, зная это, упростить решение задачи 5?

Математический анализ 1-й курс II семестр
Листок 2 17 февраля 2016 года

1. Нарисуйте линии уровня $z = \text{const}$ и графики для следующих функций:

а) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; б) $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$; в) $z = -y^2 + x^2 - x^4$; г) $z = \sqrt{-y^2 + x^2 - x^4}$;

д) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$; е) $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$; ж) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$; з) $z = \cos x - y^2$;

и) $z = \cos x \cos y$; к) $z = \sqrt[3]{x^2 + y^4}$; л) $z = x^4 + x^2 y^2 + y^5$.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 3 24 февраля 2016 года

Теорема (о неявной функции). Пусть частные производные функции F двух переменных непрерывны в точке (x_0, y_0) и пусть $F(x_0, y_0) = 0$, $\partial F / \partial y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует и единственная функция $\varphi(x)$, заданная в некоторой окрестности точки x_0 , удовлетворяющая уравнению $F(x, \varphi(x)) = 0$. Более того, функция φ дифференцируема и ее производная выражается формулой $\varphi'(x_0) = -\frac{\partial F / \partial x(x_0, y_0)}{\partial F / \partial y(x_0, y_0)}$.

1. Выведите из теоремы о неявной функции теорему об обратной функции: пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема в точке x_0 , причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда f задает взаимно-однозначное соответствие некоторой окрестности точки x_0 на некоторую окрестность точки $y_0 = f(x_0)$, т.е. функция f обладает обратной функцией $f^{-1}(y)$, удовлетворяющей $f^{-1}(f(x)) \equiv x$. Обратная функция дифференцируема и ее производная выражается формулой $f^{-1}'(y_0) = 1/f'(x_0)$.
2. Пусть $y = y(x)$ — заданная функция, $y(x_0) = 0$. Выразите константы разложения $x = x(y) = x_0 + Ay + By^2 + o(y^2)$ через производные функции y .
3. Функция $y = \varphi(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$.
 - а) Докажите, что если F бесконечно дифференцируема, то и φ бесконечно дифференцируема.
 - б) Выразите φ'' через частные производные функции F .
4. Нарисуйте следующие кривые. Найдите особые точки, вертикальные и горизонтальные касательные. Найдите несколько членов ряда Тейлора для функций $y(x)$ и $x(y)$ в точке (x_0, y_0) .
 - а) $x^2 + xy + y^2 = 1$; $(x_0, y_0) = (0, 1)$;
 - б) $x^3 + y^3 = 2xy$, $x^4 + y^4 = 2xy$; $(x_0, y_0) = (0, 0), (1, 1)$;
 - в) $(x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 = 100$; г) $(x^2 - y)^3 + x^2 + y^2 = 100$.
5. Под каким углом пересекаются гиперболы $x^2 - y^2 = a$; $xy = b$?
6. Нарисуйте следующие кривые, заданные параметрически:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} x = e^{\pm t} \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} x = 2t^3 - 3t \\ y = t^4 - t^2 \end{cases} \end{array}$$

Независимый Московский Университет
Математический анализ 1-й курс II семестр
Листок 4 2 марта 2016 года

1. Постройте кривые

$$\text{а) } x^4 + y^4 = x^2 y \quad \text{б) } \begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \sin 5t \end{cases}$$

Якобианом отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется определитель его матрицы Якоби

$$J = \det \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1,\dots,n}.$$

2. Рассмотрим отображение плоскости без начала координат в себя

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

- а) Найдите якобиан этого отображения;
- б) Найдите его якобиан в полярных координатах;
- в) Найдите обратное отображение;
- г) Найдите образ окружности $(x - a)^2 + y^2 = c^2$ при этом отображении.

3. Изобразите множество точек, в окрестности которых необратимо отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданное формулой

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ \sin xy \end{pmatrix}$$

4. Вычислите координаты касательных векторов $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$, а также кокасательных векторов dx и dy на евклидовой плоскости, в полярных координатах.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 5 9 марта 2016 года

1. Рассмотрим отображение плоскости в себя, задаваемое формулами:

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

Что это отображение делает с плоскостью? Где применима теорема об обратном отображении? Что происходит там, где она неприменима?

2. Ответьте на те же вопросы для отображения $\begin{cases} u = x^2 - y^2 + 2\varepsilon x \\ v = 2xy - 2\varepsilon y \end{cases}$

3. Нарисуйте на плоскости кривую $\begin{cases} x = t^3 - 8t \\ y = t^3 - t \end{cases}$. Докажите, что при $t \rightarrow \infty$ эта кривая является графиком функции $y = y(x)$. Найдите асимптотику этой функции. Обоснуйте возможность асимптотики.

4. То же задание для кривой $\begin{cases} x = t^4 - 2t^2 \\ y = 3t^5 - 5t^3 \end{cases}$.

5. Можно ли представить в виде образа гладкой кривой следующие множества: а) окружность; б) $x^2 = y^3$; в) $x^2 = y^2$; г) граница квадрата; д) квадрат; е) круг без границы.

6. Какие плохие точки бывают у кривой $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \end{cases}$, где $p(t), q(t)$ — многочлены? Оцените эмпирически, какие из них более вырождены и какие встречаются у кривых общего положения.

7. Пусть переменные x, y, z связаны одним уравнением $F(x, y, z) = 0$. Вычислите

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$$

где при вычислении частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ величина z рассматривается как неявно заданная функция от x и y и т.д.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 6 16 марта 2016 года

Теорема (принцип сжимающих отображений). Пусть M — полное метрическое пространство. Пусть отображение $A : M \rightarrow M$ удовлетворяет $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \forall x, y, \alpha < 1$. Тогда у отображения A существует и единственна неподвижная точка $Ax = x$.

1. Докажите теорему. Покажите, что для любой начальной точки x_0 выполняется оценка $\rho(A^k x_0, x) \leq s \frac{\alpha^k}{1-\alpha}$, где $s = \rho(Ax_0, x_0)$.
2. Докажите, что уравнение $x = x^3 + 0.1$ имеет корень вблизи нуля. Найдите его первые 5–10 десятичных знаков.
3. Докажите, что система

$$\begin{cases} x = (x^2 + y^2)/100 \\ y = (xy^2 + 0.1)/100 \end{cases}$$

имеет решение вблизи нуля. Найдите это решение с точностью до 10^{-10} .

4. Как переписать уравнение $x^2 = 2$, чтобы для его решения можно было применить принцип сжимающих отображений? Годится ли $x = 2/x$?
5. Решая уравнение $x^2 - ax + b = 0$, его переписали в виде $x = a - b/x$. При каких a, b, x_0 процесс последовательных приближений сходится? К какому из двух корней (если они есть)?
6. Докажите, что всякое непрерывное отображение а) отрезка $[0, 1]$, б) диска D^2 в себя имеет неподвижную точку.
7. Докажите, что среди решений системы от бесконечного числа переменных

$$x_n = \frac{1}{5}(x_{n+1} + x_{n-1}) + \frac{1}{1+n^2}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

существует и единственно ограниченное.

8. Петя вышел из дома в школу, но на полпути передумал и повернул в кино. На полпути в кино он опять передумал и пошел домой. На полпути к дому у него взыграла совесть, и он повернул в школу. На полпути к школе он опять повернул в кино, т.д. Каков будет предельный маршрут Пети после достаточно большого числа итераций?

Независимый Московский Университет
Математический анализ 1-й курс II семестр
Листок 7 23 марта 2016 года

1. Пусть функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз. Вычислите:

- (a) $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \varphi(x^2 + y^2)$;
(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

2. Преобразуйте к полярным координатам:

- (a) $w = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}$;
(b) $w = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$;
(c) $w = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

3. Найдите все функции f , удовлетворяющие условию:

- (a) $x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$;
(b) $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

4. Пусть $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$ (1) и $f(x, y, z) = xy^2z^3$. Вычислите:

- (a) $f'_x(1, 1, 1)$, если x, y, z — независимые переменные;
(b) $f'_x(1, 1, 1)$, если $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением (1);
(c) $f'_x(1, 1, 1)$, если $y = y(x, z)$ задана неявно уравнением (1).

5. Пусть уравнения $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ определяют z как функцию от x и y .
Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. Пусть функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

и условиям $u(x, 2x) = x$; $u'_x(x, 2x) = x^2$.

Найдите $u''_{xx}(x, 2x)$; $u''_{xy}(x, 2x)$; $u''_{yy}(x, 2x)$.

7. Функция $u = u(x, y)$ определяется системой уравнений

$$\begin{cases} u = f(x, y, z, t) \\ g(y, z, t) = 0 \\ h(z, t) = 0 \end{cases}.$$

Найдите $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

8. Вычислите $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, если $u = \frac{e^{-r}}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

9. Найдите выражение для $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, в сферических координатах,

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi).$$

Независимый Московский Университет
Математический анализ 1-й курс II семестр
Листок 8 30 марта 2016 года

Пусть поверхность M задана неявно системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

и $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Мы ищем точки экстремума ее ограничения на M .

Теорема (принцип множителей Лагранжа). *Критические точки ограничения g на M соответствуют критическим точкам функции*

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = g + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k,$$

то есть задаются уравнениями
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \\ f_i (= \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}) = 0 \end{cases}.$$

1. Найдите максимум функции $x_1 x_2 \cdots x_n$ на множестве $\sum x_i = a, x_i \geq 0$.
2. Найдите экстремумы $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ при ограничениях $\sum x_i^2 = \sum y_i^2 = 1$.
3. Докажите неравенство $(\sum |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leq (\sum |x_i|^p)^{1/p} + (\sum |y_i|^p)^{1/p}$.
4. Найдите максимум функции $\sum \alpha_i x_i$ на поверхности $\sum |x_i|^p = 1$ ($p > 1$). Какому неравенству это соответствует?
5. Сколько нормалей можно опустить на эллипс из данной точки плоскости?
6. Найдите норму линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, то есть $\max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ для стандартной нормы $\|x\| = \sum x_i^2$.
7. Определите максимум и минимум функции $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
8. Докажите, что на торе любая функция имеет не меньше трех критических точек. Существует ли функция а) на сфере б) на торе с ровно тремя критическими точками?