03.03.2016
Лекция 4

Производные функторы и функторы Ext.

Пришло время определить производные функторы.

Пусть F – точный справа ковариантный функтор. Фиксируем для каждого модуля M некоторую проективную резольвенту $P(M)_\bullet$. Определим i-й *левый производный функтор* от F: на объектах
$$L_iF(M) = H_i(F(P(M)_\bullet)).$$
На морфизмах: пусть $f\colon M \to N$ – гомоморфизм модулей, продолжим его как-нибудь до гомоморфизма резольвент $f_\bullet\colon P(M)_\bullet \to P(N)_\bullet$ и положим
$$L_iF(f) = H_i(F(f_\bullet)).$$
Так как $f_\bullet$ и $F(f_\bullet)$ определены однозначно с точностью до гомотопии, индуцированное ими отображение на когомологиях определено однозначно. Отсюда следует корректность определения и то, что L_iF – функтор. *Правые производные функторы* R^iF от точного слева функтора F определяются аналогично с использованием инъективных резольвент.

Из определения сразу следует, что $L_iF = 0$ при $i < 0$ и $L_0F \cong F$. Также видно, что для точного F все $L_iF = 0$ при $i > 0$. Полезно заметить, что производные функторы можно вычислять, использую любую другую проективную резольвенту для M: если $Q(M)_\bullet$ – другая резольвента, то имеются гомотопические эквивалентности $P(M)_\bullet \to Q(M)_\bullet$ и $F(P(M)_\bullet) \to F(Q(M)_\bullet)$, и последняя на гомологиях индуцирует изоморфизмы.

Точный функтор, применённый к короткой точной последовательности модулей, даёт снова короткую точную последовательность. Последовательность, полученная применением к
$$0 \to K \to L \to M \to 0$$
функтора F, точного лишь с одной стороны, уже не будет точна. Однако она может быть дополнена до *длинной точной последовательности производных функторов.* Для точного справа ковариантного F эта последовательность имеет вид

$$\begin{tikzcd}
\cdots & L_2F(K) \arrow[d] & L_1F(K) \arrow[d] & F(K) \arrow[d] & \\
\cdots & L_2F(L) \arrow[d] & L_1F(L) \arrow[d] & F(L) \arrow[d] & \\
\cdots & L_2F(M) \arrow[uur, "\delta"] & L_1F(M) \arrow[uur, "\delta"] & F(M) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Чтобы построить длинную точную последовательность, нужно продолжить точную тройку модулей до хорошей точной тройки резольвент.

Лемма 1. *Пусть $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ – точная тройка модулей, $P_\bullet$ и $Q_\bullet$ – проективные резольвенты K и M. Тогда существует проективная резольвента $R_\bullet$ модуля L и точная тройка комплексов $0 \to P_\bullet \to R_\bullet \to Q_\bullet \to 0$, продолжающая данную точную тройку и почленно расщепимая.*

Доказательство. Рассмотрим комплекс

$$\overline{P}_\bullet\colon\ \ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{fd_0} L$$

(L находится в -1-й степени). Его когомологии – M в члене -1. Продолжим тождественный морфизм M до морфизма резольвент $Q_\bullet[-1] \to \overline{P}_\bullet$, пусть $C_\bullet$ – его конус. Тогда $C_\bullet$ ацикличен, младший член $C_{-1} = L$ и имеется точная почленно расщепимая тройка

$$0 \to \overline{P}_\bullet \to C_\bullet \to Q \to 0.$$

Отбрасывая от неё -1-е члены, получаем искомую проективную резольвенту $R_\bullet$ для L и точную тройку резольвент. □

Теперь применим к построенной точной тройке резольвент точный справа функтор. Поскольку та расщепима, получим снова точную тройку комплексов. Соответствующая длинная точная последовательность в когомологиях и будет искомой длинной точной последовательностью производных функторов. Это – один из основных инструментов для вычисления производных функторов.

Задача 1. Проверьте, что a) связывающие гомоморфизмы $\delta_i\colon L_iF(M) \to L_{i-1}F(K)$ в длинной точной последовательности производных функторов не зависят от выбора резольвент; b) δ_i являются морфизмами функторов на категории точных троек модулей.

Задача 2. Проверьте, что точный справа функтор F точен $\Leftrightarrow L_iF(M) = 0$ для всех M и $i > 0 \Leftrightarrow L_1F(M) = 0$ для всех M.

Теперь рассмотрим главный пример производных функторов – функторы Ext.

Функтор Ext – это производный от функтора Hom. При этом Hom является точным слева функтором по каждому из двух аргументов, поэтому можно определить две серии правых производных функторов:

$$\operatorname{Ext}^i_I(M,N) = (R^i \operatorname{Hom}(-,N))(M) \quad \text{и} \quad \operatorname{Ext}^i_{II}(M,N) = (R^i \operatorname{Hom}(M,-))(N).$$

Несложно видеть, что морфизм модулей $N_1 \to N_2$ индуцирует морфизм производных функторов $\operatorname{Ext}^i_I(M,N_1) \to \operatorname{Ext}^i_I(M,N_2)$, тем самым Ext^i_I будет функтором от двух аргументов. Аналогично, $\operatorname{Ext}^i_{II}$ – функтор двух аргументов, и как мы позже увидим, эти бифункторы изоморфны. Пока же мы в это поверим.

Лемма 2. *Модуль P проективен $\Leftrightarrow \operatorname{Ext}^i(P,N) = 0$ при всех $i > 0$ и $N \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^1(P,N) = 0$ при всех $i > 0$ и N.*

Если использовать определение Ext как производного функтора по второму аргументу, то лемма очевидно следует из предыдущей задачи, так как проективность P равносильна точности функтора $\operatorname{Hom}(P,-)$.

Задача 3. Проведите доказательство леммы для определения по первому аргументу.

Пример. Вычислим $\operatorname{Ext}^i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},N)$ над кольцом целых чисел. Проективная резольвента для $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ имеет вид $\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$. Применяя к ней $\operatorname{Hom}(-,N)$, получим комплекс $N \xrightarrow{n} N$. Вычисляя когомологии, получаем:

- $\operatorname{Ext}^0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},N) = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},N) = \{x \in N \mid nx = 0\}$;
- $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},N) = N/nN$;
- $\operatorname{Ext}^i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},N) = 0 \quad$ при $\quad i > 1$.

Пример. Рассмотрим кольцо $A = \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n] = \mathsf{k}[V]$. Вычислим $\mathrm{Ext}^i(M, N)$, где $M = \mathsf{k}$ (с нулевым действием x_i), а $N = \mathsf{k}$ или A. Воспользуемся резольвентой Кошуля (сдвинутой на n) для $M = A^{\oplus n}$, $m = (x_1, \dots, x_n) \in M$. Последовательность $x_1, \dots, x_n \in A$ регулярная, значит комплекс Кошуля имеет единственные когомологии $A/(x_1, \dots, x_n) = \mathsf{k}$. Применяя к $K^\bullet[n]$ функтор $\mathrm{Hom}(-, A)$, получим комплекс, изоморфный $K^\bullet$. Получаем:

$$\mathrm{Ext}^i(\mathsf{k}, A) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq n, \quad \mathrm{Ext}^n(\mathsf{k}, A) = \mathsf{k}.$$

А применяя к $K^\bullet[n]$ функтор $\mathrm{Hom}(-, \mathsf{k})$, мы получим комплекс с нулевыми дифференциалами и i-м членом $\Lambda^i(V)$. Следовательно,

$$\mathrm{Ext}^i(\mathsf{k}, \mathsf{k}) = \Lambda^i(V).$$

Задача 4. Вычислите группы $\mathrm{Ext}^i(\mathsf{k}, \mathsf{k})$ над $\mathsf{k}[x]/(x^2)$.

Название Ext означает extension, т.е. расширение. Причина этого в том, что $\mathrm{Ext}^1(M, N)$ классифицирует расширения модуля M с помощью N.

Расширение M с помощью N – это точная тройка $0 \to N \to K \to M \to 0$. Два расширения изоморфны, если существует диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Предложение 3. *Множество классов изоморфизма расширений M с помощью N изоморфно* $\mathrm{Ext}^1(M, N)$.

Для доказательства нам понадобятся понятия расслоенного произведения и копроизведения в категории. Пусть $X \xrightarrow{f} Z$ и $Y \xrightarrow{g} Z$ – два морфизма в некоторой категории. *Расслоенным произведением* $X \times_Z Y$ называется объект, представляющий функтор $T \mapsto \{(a, b) \mid fa = gb\} \subset \mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y)$. Иначе говоря, это конечный объект в категории коммутативных диаграмм вида

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Z.
\end{tikzcd}$$

Двойственным образом определяется *расслоенное копроизведение* (или, что то же, *корасслоенное произведение*).

Задача 5. Докажите, что расслоенные и корасслоенные произведения в категории модулей существуют (и значит, единственны).

Доказательство предложения. Сопоставим расширению элемент в $\mathrm{Ext}^1(M, N)$. Напишем длинную точную последовательность производных функторов для $\mathrm{Hom}(-, N)$. В ней будет кусок $\mathrm{Hom}(N, N) \to \mathrm{Ext}^1(M, N)$, возьмём образ 1_N в качестве искомого элемента. Опишем это соответствие более явно. Фиксируем проективную резольвенту $P_\bullet$ для M. Построим морфизм комплексов $f_\bullet$

(1)
$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Гомоморфизм $f_1 \in \mathrm{Hom}(P_1, N)$ задаёт нужный класс в коциклах комплекса $\mathrm{Hom}(P_\bullet, N)$, вычисляющего $\mathrm{Ext}^i(M, N)$. При этом замена $f_\bullet$ на гомотопный морфизм изменяет f_1 на кограницу в $\mathrm{Hom}(P_\bullet, N)$.

Теперь сопоставим элементу $\mathrm{Ext}^1(M, N)$ расширение модулей. Элемент в Ext^1 задан гомоморфизмом $f_1 \in \mathrm{Hom}(P_1, N)$ таким, что $f_1 d_2 = 0$. Положим $K = N \times^{P_1} P_0$. Чтобы задать морфизм t из $N \times^{P_1} P_0$ в M, рассмотрим пару гомоморфизмов $0\colon N \to M$ и $d_0\colon P_0 \to M$, совпадающие на P_1. Утверждается, что $0 \to N \xrightarrow{s} K \xrightarrow{t} M \to 0$ будет расширением. Например, проверим, что гомоморфизм $s\colon N \to N \times^{P_1} P_0$ инъективен. Если $s(n) = 0$, то (по конструкции корасслоенного произведения) $n = f_1(p_1)$ и $d_1(p_1) = 0$. Значит, $p_1 = d_2(p_2)$ и $n = f_1 d_2(p_2) = 0$.

Остаётся проверить, что построенные соответствия между расширениями и Ext^1 взаимно обратны. Композиция этих соответствий, начинающаяся с Ext^1, тождественна по очевидным причинам. Проверки тождественности другой композиции сводится к тому, что в диаграмме (1) K есть корасслоенное произведение $N \times^{P_1} P_0$. $\square$

Задача 6. Заполнить пробелы в доказательстве.
Задача 7. a) Вычислите $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. b) Сколько различных неизоморфных абелевых групп можно получить, расширяя $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ при помощи $\mathbb{Z}$?

Высшие группы Ext тоже можно описывать при помощи расширений, только отношение эквивалентности выглядит немного хитрее.

Предложение 4 (Ext по Йонеде)**.** *Докажите, что имеется биекция между* $\mathrm{Ext}^i(M, N)$ *и классами эквивалентности точных последовательностей*

$$0 \to N \to K_{i-1} \to \ldots \to K_0 \to M \to 0.$$

Две последовательности эквивалентны, если их можно соединить цепочкой элементарных эквивалентностей вида

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K'_{i-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & K'_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Набросок доказательства. Как и выше, фиксируем проективную резольвенту $P_\bullet$ для M. Построим морфизм резольвент (рисунок для $i = 3$)

$$\begin{tikzcd}
P_4 \arrow[r] \arrow[d] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

и сопоставим точной последовательности класс коцикла $f_i \in \mathrm{Hom}(P_i, N)$ в комплексе $\mathrm{Hom}(P_\bullet, N)$.

Обратно, по морфизму $f_i\colon P_i \to N$ построим расширение. Положим $K_{i-1} = N \times^{P_i} P_{i-1}$, $K_l = P_l$ при $0 \leqslant l \leqslant i-2$. Морфизм $d_i\colon N \to K_{i-1}$ – канонический, морфизм $d_{i-1}\colon K_{i-1} \to P_{i-2}$ строится исходя из универсального свойства $N \times^{P_i} P_{i-1}$. Проверки показывают, что получается коммутативная диаграмма точных последовательностей (опять $i = 3$)

(2)
$$\begin{tikzcd}
P_4 \arrow[r] \arrow[d] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & N \times^{P_3} P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Наконец, если дано другое расширение $0 \to N \to K'_{i-1} \to \ldots \to K'_0 \to M \to 0$, соответствующее тому же гомоморфизму $f_i\colon P_i \to N$, то строится элементарная эквивалентность из второй строки (2) в это расширение. □

Задача 8. Пусть $u\colon M' \to M$ – гомоморфизм. Проверьте, что индуцированное отображение $\mathrm{Ext}^i(M,N) \to \mathrm{Ext}^i(M',N)$ переводит класс последовательности $0 \to N \to K_{i-1} \to \ldots \to K_0 \to M \to 0$ в класс последовательности

$$0 \to N \to K_{i-1} \to \ldots \to K_1 \to K_0 \times_M M' \to M' \to 0,$$

а также в класс любой последовательности, включающейся в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & K'_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & K'_0 \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K_{i-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & K_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Опишите функториальность Ext по второму аргументу в терминах расширений.

Из определений видно, что $\mathrm{Ext}^i(M,N)$ – это морфизмы из проективной резольвенты $P_\bullet$ для M в комплекс $N[i]$ по модулю гомотопных нулю морфизмов. Пусть $K_\bullet$ – какая-то резольвента для $N[i]$. Как мы раньше показывали, морфизмы по модулю гомотопии из $P_\bullet$ в $N[i]$ и в $K_\bullet$ равны. В частности, верна

Лемма 5. *Имеется изоморфизм*

$$\mathrm{Ext}^i(M,N) \cong \mathrm{Hom}(P_\bullet(M), N[i]) \cong \mathrm{Hom}(P_\bullet(M), P_\bullet(N)[i]),$$

где $P_\bullet(M)$ и $P_\bullet(N)$ – проективные резольвенты для M и N соответственно.

Такое описание позволяет определить ассоциативное умножение

$$\mathrm{Ext}^j(N,L) \times \mathrm{Ext}^i(M,N) \to \mathrm{Ext}^{i+j}(M,L):$$

если $\alpha\colon P_\bullet(M) \to P_\bullet(N)[i]$ и $\beta\colon P_\bullet(N) \to P_\bullet(L)[j]$, то $\beta\alpha\colon P_\bullet(M) \to P_\bullet(L)[i+j]$ определим как $\beta[i] \circ \alpha$.

Это же умножение удобно описывать по Йонеде.

Пусть элементы $\alpha \in \mathrm{Ext}^i(M,N)$ и $\beta \in \mathrm{Ext}^j(N,L)$ заданы точными последовательностями $0 \to N \to K_{i-1} \to \ldots \to K_0 \to M \to 0$ и $0 \to L \to K'_{j-1} \to \ldots \to K'_0 \to N \to 0$. Определим произведение $\beta * \alpha \in \mathrm{Ext}^{i+j}(M,L)$ как класс склеенной последовательности $0 \to L \to K'_{j-1} \to \ldots \to K'_0 \to K_{i-1} \to \ldots \to K_0 \to M \to 0$.

Задача 9. a) Проверьте, что $\beta * \alpha = (-1)^{ij}\beta\alpha$.

b) Проверьте, что любой элемент в Ext^i можно представить как произведение элементов из Ext^1.