Когомологии Хохшильда и когомологии групп

Сегодня мы определим гомологии и когомологии Хохшильда и гомологии и когомологии групп и выясним, что с их помощью можно делать.

Когомологии Хохшильда. Пусть A – алгебра над кольцом k (т.е., k лежит в центре A), свободная как k-модуль. Рассмотрим функтор из $A \otimes_{\mathsf{k}} A^{op}$-модулей в $\mathsf{k}-\mathrm{mod}$:

$$M \mapsto \{m \mid \forall a\ am = ma\}.$$

Он точен слева, его правые производные функторы называются *когомологиями Хохшильда алгебры (с коэффициентами в модуле)* и обозначаются $HH^i(A, -)$. Чтобы их вычислять, заметим, что описанный функтор – это на самом деле $\mathrm{Hom}_{A\otimes A^{op}}(A, -)$, а производные от него функторы – $\mathrm{Ext}^i_{A\otimes A^{op}}(A, -)$. При их вычислении можно пользоваться Bar-резольвентой – свободной резольвентой A как $A \otimes A^{op}$-модуля:

$$K_n = A^{\otimes n+2}, \quad d_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1}.$$

Заметим, что $\mathrm{Hom}_{A\otimes A^{op}}(A^{\otimes n+2}, M) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(A^{\otimes n}, M)$. Учитывая это, получаем комплекс, вычисляющий $HH^i(A, M)$:

$$(1)\quad K^n = \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(A^{\otimes n}, M),$$

$$(d^n f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = a_1 f(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) a_{n+1}.$$

Задача 1. a) Проверьте приведённую формулу для дифференциала.

b) Что такое $HH^0(A, A)$?

c) Проверьте, что 1-коциклы и 1-кограницы в (1) – это дифференцирования $A \to M$ и дифференцирования вида $a \mapsto am - ma$ соотв.

В случае, когда A – кольцо гладких функций на гладком многообразии X, получаем, что $HH^1(A, A)$ – дифференцирования A со значениями в A, т.е., векторные поля на X.

С помощью когомологий Хохшильда описываются деформации алгебр. Дадим сначала более наглядное определение в вещественном случае. Пусть A – $\mathbb{R}$-алгебра (ассоциативная, с единицей), а $x_0 \in X$ – точка на гладком многообразии. Деформацией алгебры A с базой X будем называть векторное расслоение B на X, на каждом слое которого введена структура алгебры, гладко зависящая от точки, и фиксирован изоморфизм $B_{x_0} \cong A$. На языке алгебраической геометрии определение принимает следующий вид. Пусть $R \supset I$ – максимальный идеал в коммутативном кольце над k с полем вычетов k. Деформацией алгебры A над полем k с базой $\mathrm{Spec}\, R$ называется алгебра B над кольцом R, локально свободная как R-модуль, вместе с изоморфизмом $B \otimes_R \mathsf{k} \cong A$.

Мы ограничимся простейшим случаем инфинитезимальных деформаций: то есть, над базой $\mathrm{Spec}\, \mathsf{k}\langle\varepsilon\rangle$, где $\mathsf{k}\langle\varepsilon\rangle = \mathsf{k}[\varepsilon]/\varepsilon^2$ – кольцо дуальных чисел. В этом случае деформация – это $\mathsf{k}\langle\varepsilon\rangle$-алгебра, изоморфная $A\langle\varepsilon\rangle$ как $\mathsf{k}\langle\varepsilon\rangle$-модуль и такая, что умножение $*$ в ней совпадает с обычным умножением $\cdot$ по модулю ε. Умножение в такой алгебре однозначно задаётся формулой

$$a * b = a \cdot b + f(a \otimes b)\varepsilon,$$

где $f\colon A\otimes A\to A$ – гомоморфизм модулей. Такую дефорамцию мы обозначим B_f. Изоморфизмом деформаций называется изоморфизм $\phi\colon B_{f_1}\to B_{f_2}$ алгебр над $\mathsf{k}\langle\varepsilon\rangle$ такой, что $\phi=\mathrm{id}\pmod{\varepsilon}$. Любой такой изоморфизм имеет вид $\phi_g(a)=a+g(a)\varepsilon$, где $g\colon A\to A$ – k-линейное отображение.

Задача 2. Проверьте, что

a) Умножение $*$ ассоциативно $\Leftrightarrow$ f – 2-коцикл в комплексе (1) для $M=A$.

b) ϕ_g есть изоморфизм $B_{f_1}\to B_{f_2}\Leftrightarrow f_1-f_2=d(g)$. Следовательно, $B_{f_1}\cong B_{f_2}\Leftrightarrow$ классы f_1 и f_2 в $HH^2(A,A)$ совпадают. Таким образом, ассоциативные деформации алгебры A описываются группой $HH^2(A,A)$.

Задача 3. Покажите, что группа автоморфизмов любой деформации B_f изоморфна $Z^1_{HH}(A,A)$ – 1-коциклам в комплексе (1) для $M=A$.

Гомологии Хохшильда. Пусть по-прежнему A – алгебра над коммутативным кольцом k, свободная как k-модуль. Рассмотрим функтор из $A\otimes_{\mathsf{k}}A^{op}-\mathrm{mod}$ в $\mathsf{k}-\mathrm{mod}$:

$$M\mapsto M/(am-ma)_{m\in M,a\in A}.$$

Здесь $(am-ma)_{m\in M,a\in A}$ обозначает k-подмодуль, порождённый всеми элементами указанного вида. Этот функтор точен справа, его левые производные функторы называются *гомологиями Хохшильда алгебры (с коэффициентами в модуле)* и обозначаются $HH_i(A,M)$. Для их вычисления полезно заметить, что описанный функтор – это на самом деле тензорное умножение над $A\otimes_{\mathsf{k}}A^{op}$ на бимодуль A. Поэтому искомые производные функторы суть $\mathrm{Tor}_i^{A\otimes_{\mathsf{k}}A^{op}}(A,M)$, и для их вычисления можно использовать Bar-резольвенту. Выпишем явно комплекс, вычисляющий гомологии Хохшильда при помощи Bar-резольвенты. Имеем

(2) $\quad K_n=A^{\otimes n}\otimes M,$

$$d^n(a_1\otimes\ldots\otimes a_n\otimes m)=a_2\otimes\ldots\otimes a_n\otimes ma_1+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i a_1\otimes\ldots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n\otimes m+(-1)^n a_1\otimes\ldots\otimes a_nm.$$

Задача 4. Проведите соответствующие вычисления.

Покажем, что в случае коммутативного кольца A группа $HH_1(A,A)$ изоморфна модулю $\Omega(A)$ дифференциалов кольца A. Нужный кусок комплекса Хохшильда имеет вид

$$A\otimes A\otimes M\xrightarrow{d_2}A\otimes M\xrightarrow{d_1}M,$$

где $M=A, d_2(a_1\otimes a_2\otimes m)=a_2\otimes ma_1-a_1a_2\otimes m+a_1\otimes a_2m$, $d_1(a\otimes m)=ma-am=0$. Заметим, что комплекс Хохшильда — комплекс A-модулей относительно умножения на самый правый тензорный сомножитель. Определим гомоморфизм A-модулей $f\colon A\otimes M\to\Omega(A)$: $f(a\otimes m)=m\cdot da$. Он сюръективен, так как $\Omega(A)$ порождён элементами вида da. При этом $\operatorname{im}d_2$ переходит в точности в элементы вида $m(a_1\cdot da_2+a_2\cdot d(a_1)-d(a_1a_2))$, т.е. в определяющие модуль дифференциалов соотношения. Поэтому получаем изоморфизмы $\Omega(A)\cong(A\otimes M)/\operatorname{im}d_2\cong HH_1(A,A)$.

Аналогичное описание имеется и у старших гомологий Хохшильда:

Теорема 1 (Хохшильд – Костант – Розенберг)**.** *Пусть A — кольцо регулярных функций на гладком аффинном алгебраическом многообразии X. Тогда имеются изоморфизмы $HH_i(A,A)\cong\Omega^i(X)$ гомологий Хохшильда с модулями старших дифференциальных форм на X.*

17.03.2016

Лекция 6

Когомологии групп. Пусть G – группа, под G-модулем мы будем иметь в виду модуль над $\mathbb{Z}[G]$, т.е. абелеву группу с действием G. Рассмотрим функтор инвариантов из G-модулей в $\mathcal{A}b$:

$$M \mapsto M^G = \{m \mid \forall g\ gm = m\}.$$

Он точен слева, его правые производные функторы называются *когомологиями группы (с коэффициентами в модуле)* и обозначаются $H^i(G, -)$.

Рассмотрим функтор коинвариантов из категории G-модулей в $\mathcal{A}b$:

$$M \mapsto M_G = M/(gm - m)_{g \in G, m \in M}.$$

Он точен справа, его левые производные функторы называются *гомологиями группы (с коэффициентами в модуле)* и обозначаются $H_i(G, M)$.

Для вычисления полезно заметить, что $M^G = \mathrm{Hom}^G(\mathbb{Z}, M)$, где $\mathbb{Z}$ обозначает тривиальный левый G-модуль, поэтому $H^i(G, M) = \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$. Аналогично, $M_G = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$, где $\mathbb{Z}$ обозначает тривиальный правый $\mathbb{Z}[G]$-модуль. Поэтому $H_i(G, M) = \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$.

Свободную $\mathbb{Z}[G]$-резольвенту левого модуля $\mathbb{Z}$ можно получить, домножая тензорно Bar-резольвенту для $\mathbb{Z}[G]$ над $\mathbb{Z}[G]$ справа на $\mathbb{Z}$. Так как Bar-резольвента (с -1-м членом) состоит из свободных правых $\mathbb{Z}[G]$-модулей, тензорное умножение сохранит точность и получится резольвента:

$$(3)\quad K^n = \mathbb{Z}[G]^{\otimes n+1}, \quad d_n(g_0 \otimes \ldots \otimes g_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i g_0 \otimes \ldots \otimes g_i g_{i+1} \otimes \ldots \otimes g_n + (-1)^n g_0 \otimes \ldots \otimes g_{n-1}.$$

Применяя к ней $\mathrm{Hom}^G(-, M)$, получим комплекс, вычисляющий $H^i(G, M)$:

$$K^n = \mathrm{Hom}^G(\mathbb{Z}[G]^{\otimes n+1}, M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}ets}(G^{\times n}, M),$$
$$(d^n f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = g_1 f(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) +$$
$$+ (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n).$$

Его коциклы/кограницы называют коциклами/кограницами G с коэффициентами в M. Выписав явно начало этого комплекса, можно убедиться, что 1-коциклы G с коэффициентами в M — это функции $f\colon G \to M$, для которых

$$f(g_1 g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1),$$

а 1-кограницы — функции f_m следующего вида: $f_m(g) = gm - m$. В случае модуля M с тривиальным действием получаем, что $H^1(G, M)$ — это гомоморфизмы групп $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\nabla\surd}(G, M)$.

Задача 5. a) Постройте свободную резольвенту правого $\mathbb{Z}[G]$-модуля $\mathbb{Z}$. b) Выпишите явно комплекс, вычисляющий гомологии G с коэффициентами в M.

Однако для конкретных вычислений пользоваться комплексом Хохшильда не очень удобно – он слишком велик. Часто можно построить вполне ручные резольвенты $\mathbb{Z}$ как $\mathbb{Z}[G]$-модуля. Например, пусть G — циклическая группа, порождённая элементом g порядка n. Обозначим $s = \sum_{i=0}^{n-1} g^i$.

Задача 6. Проверьте, что комплекс

$$\ldots \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{s} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-g} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{s} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-g} \mathbb{Z}[G]$$

является свободной $\mathbb{Z}[G]$-резольвентой модуля Z. Применяя $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-, M)$ к этому комплексу, получаем комплекс, вычисляющий когомологии G с коэффициентами в M:

$$M \xrightarrow{1-g} M \xrightarrow{s} M \xrightarrow{1-g} M \xrightarrow{s} M \xrightarrow{1-g} M \xrightarrow{s} M \to \dots$$

Видно, что

- $H^0(G, M) = M^G$,
- $H^i(G, M) = H^1(G, M)$ при нечётных i,
- $H^i(G, M) = H^2(G, M)$ при чётных $i \geqslant 2$.

Если при этом действие G на M тривиально, получаем

- $H^0(G, M) = M$,
- $H^i(G, M) = \{m \mid nm = 0\} \subset M$ при нечётных i,
- $H^i(G, M) = M/nM$ при чётных $i \geqslant 2$.

Также компактные резольвенты $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}[G]$ можно получать при помощи следующей топологической конструкции.

Пусть X – клеточное пространство с действием группы G, при этом действие согласовано с клеточным разбиением и свободно на клетках каждой размерности. Предположим, что X ациклично: $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ при $i > 0$. Тогда комплекс цепей $C_\bullet(X, \mathbb{Z})$ будет комплексом свободных $\mathbb{Z}[G]$-модулей, и при этом будет резольвентой для $\mathbb{Z}$.

Задача 7. Пусть Y – связное клеточное пространство, односвязная накрывающая которого ациклична, и пусть $G = \pi_1(Y)$. Пусть M — абелева группа с тривиальным G-действием. Тогда $H^i(G, M) = H^i(Y, M)$, $H_i(G, M) = H_i(Y, M)$. Такое Y называется классифицирующим пространством группы G.

Задача 8. Вычислите $H^i(G, \mathbb{Z})$ для $G = \mathbb{Z}^n$, для G – свободной группы.

При помощи 2-когомологий группы удобно описывать её расширения. Для простоты, ограничимся расширениями вида $1 \to A \to G' \xrightarrow{p} G \to 1$, где A – абелева группа. Так как A нормальна, с таким расширением связано действие G' на A: $g(a) = gag^{-1}$. При этом сама A действует тривиально, это превращает A в G-модуль. Предположим, у расширения существует расщепление, т.е. такой гомоморфизм $s \colon G \to G'$, что $ps = 1_G$. В таком случае G' строится однозначно по A, G и действию G на A и называется полупрямым произведением.

Как описать все расщепления фиксированного расширения? Они имеют вид отображений $s' \colon g \mapsto \beta(g)s(g)$, где $\beta(g_1g_2) = \beta(g_1) \cdot g_1(\beta(g_2))$, т.е. соответствуют 1-коциклам G со значениями в A.

Теперь изучим препятствия к расщеплению расширения. Рассмотрим расщепление $s \colon G \to G'$ отображения p на уровне множеств. Положим $\alpha(g_1, g_2) = s(g_1g_2)s(g_2)^{-1}s(g_1)^{-1}$. Так как $p(\alpha) = 1$, то $\alpha \in A$. Можно проверить, что $\alpha(g_1, g_2g_3) \cdot g_1(\alpha(g_2, g_3)) = \alpha(g_1g_2, g_3) \cdot \alpha(g_1, g_2)$, т.е. α – 2-коцикл G со значениями в A. При этом если заменить s на $s' \colon s'(g) = \beta(g)s(g)$, где $\beta(g) \in A$, то α заменится на $\alpha' \colon \alpha'(g_1, g_2) = \alpha(g_1, g_2) \cdot \beta(g_1g_2) \cdot g_1(\beta(g_2))^{-1} \cdot \beta(g_2)^{-1}$, т.е. изменится на 2-кограницу. Таким образом, вторые когомологии G с коэффициентами в A классифицируют расширения G при помощи A.

Задача 9. Проведите соответствующие вычисления.

Рассмотрим как это работает на примере. Пусть $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. В таком случае существует два действия G на A: тривиальное и инволюция $a \mapsto -a$. Это соответствует двум полупрямым произведениям: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и группе движений n-угольника D_n. Когомологические комплексы Хохшильда, считающие когомологии, для этих действий выглядят так:

$$A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{2} A \xrightarrow{0} A \to \dots \qquad\qquad A \xrightarrow{2} A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{2} A \to \dots$$

Опишем расщепления полупрямых произведений, они соответствуют 1-коциклам. В случае тривиального действия и нечётного n имеем $Z^1(G, A) = 0$, т.е. расщепление единственно. В случае тривиального действия и чётного n имеем $Z^1(G, A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, т.е. существует одно нетривиальное расщепление. Оно задаётся элементом $(n/2, 1) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = G'$. Рассмотрим нетривиальное действие G на A, т.е. расщепления группы диэдра. Имеем $Z^1(G, A) = A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, значит есть n расщеплений. Они соответствуют осевым симметриям, сохраняющим n-угольник.

Теперь изучим расширения вообще, они описываются вторыми когомологиями. В случае тривиального действия имеем $H^2(G, A) = A/2A$. Если n чётно, то $H^2(G, A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, и есть одно нерасщепимое расширение $0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Если n нечётно, то $H^2(G, A) = 0$ и нерасщепимых расширений нет. В случае нетривиального действия имеем $H^2(G, A) = \{a \mid 2a = 0\} \subset A$. Если n чётно, то $H^2(G, A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, и есть одно нерасщепимое расширение. А именно, рассмотрим группу

$$G' = \left\langle x = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset SL_2(\mathbb{C}),$$

где ξ — корень степени n из 1. В ней есть нормальная подгруппа порядка n, порождённая x, а факторгруппа по ней изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Если же n нечётно, то $H^2(G, A) = 0$ и нерасщепимых расширений опять нет.