31.03.2016
Лекция 8

Абелевы категории

До сих пор мы изучали комплексы, когомологии, точные функторы, проективные объекты, резольвенты, производные функторы и пр. в контексте модулей над некоторым кольцом. Точно так же можно строить теорию для объектов другого типа: градуированных модулей, пучков модулей абелевых групп на топологическом пространстве, когерентных пучков на алгебраическом многообразии, представлений группы Ли. На самом деле, мы использовали очень немного свойств категории модулей над кольцом: а именно, то что в ней существуют хорошо определённые ядра и коядра. Если аксиоматизировать эти свойства, получится определение абелевой категории.

Аддитивной категорией называется категория $\mathcal{A}$, удовлетворяющая следующим трём условиям:

1. на всех множествах морфизмов $\mathrm{Hom}(A, B)$ введена структура абелевой группы, причём умножение $\mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ билинейно;

2. в $\mathcal{A}$ существует объект 0, являющийся одновременно начальным и конечным, т.е. такой, что $\mathrm{Hom}(A, 0) = \mathrm{Hom}(0, A) = 0$ для любого A;

3. в $\mathcal{A}$ существуют конечные копроизведения.

Задача 1. Проверьте, что в аддитивной категории копроизведение A и B является и произведением A и B. Оно называется прямой суммой и обозначается $A \oplus B$.

Примеры: категория модулей над кольцом, категория конечно порождённых модулей над кольцом, категория проективных модулей над кольцом. Важный пример – категория функторов из произвольной малой категории (т.е. такой, у которой класс объектов – множество) в любую аддитивную категорию. В частности, категории проективных/инъективных систем модулей над кольцом, предпучков модулей над кольцом на топологическом пространстве аддитивны.

Функтор F между аддитивными категориями $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется *аддитивным*, если он переводит сумму морфизмов в сумму морфизмов, т.е. $F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA_1, FA_2)$ – гомоморфизм для любых A_1 и A_2.

Морфизм $f\colon A \to B$ в произвольной категории называется *инъективным*, если для любого X индуцированный гомоморфизм $\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B)$ инъективен. Аналогично, f называется *сюръективным*, если для любого X индуцированный гомоморфизм $\mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X)$ инъективен. Для аддитивной категории данные определения можно переформулировать следующим образом: $f\colon A \to B$ инъективен, если для любого $t\colon X \to A$ из $ft = 0$ следует $t = 0$. Морфизм $f\colon A \to B$ сюръективен, если для любого $t\colon B \to X$ из $tf = 0$ следует $t = 0$.

Ядром морфизма $f\colon A \to B$ в аддитивной категории называется объект $\ker f$, представляющий функтор $X \mapsto \ker(\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B))$. Равносильным образом, ядро – это морфизм $K \to A$, индуцирующий биекцию $\mathrm{Hom}(X, K) \to \{t \in \mathrm{Hom}(X, A) \mid ft = 0\}$ для всех X.

Введём двойственное понятие: *коядром* морфизма $f\colon A \to B$ называется объект $\operatorname{coker} f$, копредставляющий функтор $X \mapsto \ker(\mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X))$. Равносильным образом, коядро – это морфизм $B \to C$, индуцирующий биекцию $\mathrm{Hom}(C, X) \to \{t \in \mathrm{Hom}(B, X) \mid tf = 0\}$ для всех X.

Как объекты, представляющие функтор, ядро и коядро единственны (если существуют). Из определений следует, что инъективный морфизм – это то же, что морфизм с нулевым ядром, а сюръективный морфизм – то же, что морфизм с нулевым коядром.

Лемма 1. *Ядра инъективны, а коядра сюръективны.*

Доказательство. Докажем для ядер. Пусть $k\colon K \to A$ – ядро морфизма $f\colon A \to B$. Пусть $t\colon T \to K$ – морфизм, для которого $kt = 0$. Нужно показать, что $t = 0$. Два морфизма t и 0 из T в K при композиции с k дают один и тот же морфизм в A, аннулируемый f. По определению ядра они должны совпадать, т.е. $t = 0$. □

Предположим, что для морфизма $f\colon A \to B$ в аддитивной категории существуют следующие ядра и коядра: $k = \ker f$, $c = \operatorname{coker} f$, $i = \operatorname{coker} k$, $j = \ker c$. Несложно проверить, что тогда существует единственный f', замыкающий диаграмму

(1)
$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"] & & B \arrow[r, "c"] & C . \\
& & I \arrow[r, "f'"] & I' \arrow[u, "j"] &
\end{tikzcd}$$

При этом i называют кообразом f, а j – образом f:

$$\operatorname{coim} f = \operatorname{coker} \ker f, \qquad \operatorname{im} f = \ker \operatorname{coker} f.$$

Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется *абелевой*, если удовлетворяет двум условиям:

(AB1) У любого морфизма в $\mathcal{A}$ есть ядро и коядро;

(AB2) Морфизм f' из диаграммы (1) – изоморфизм для любого f.

Как несложно видеть, аксиома AB2 равносильна следующему: любой морфизм $f\colon A \to B$ в $\mathcal{A}$ раскладывается в композицию

$$A \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} B$$

где $i = \operatorname{coim} f$, $j = \operatorname{im} f$. Это разложение морфизма называется *каноническим.*

Задача 2. a) Пусть f – инъективный морфизм в абелевой категории. Докажите, что $f = \ker \operatorname{coker} f$. Двойственным образом, для сюръективного морфизма f имеем $f = \operatorname{coker} \ker f$.
b) Проверьте, что инъективный сюръективный морфизм в абелевой категории обратим.

Задача 3. Для любого морфизма в абелевой категории $f\colon A \to B$ имеется единственное разложение в композицию $A \xrightarrow{a} D \xrightarrow{b} B$, где a – сюръекция, а b – инъекция.

Два основных примера, ради которых была придумана аксиоматика абелевой категории, – это модули над кольцом и пучки абелевых групп на топологическом пространстве. Другие примеры – пучки модулей над пучком колец, градуированные модули над градуированным кольцом, функторы из малой категории в абелеву. Пример аддитивной категории, в которой обычно нет ядер и коядер – проективные модули над кольцом. Пример аддитивной категории, для которой есть ядра и коядра, но не выполнена аксиома AB2 – категория фильтрованных абелевых групп.

Последовательность $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$ в абелевой категории называется *точной* в среднем члене, если $\ker g \cong \operatorname{im} f$ (это два морфизма в L), или, равносильно, если $\operatorname{coker} f \cong \operatorname{coim} g$ (это два морфизма из L).

Определим когомологии комплекса, достаточно рассмотреть случай тройки $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$, в которой $gf = 0$. Имеется естественный морфизм $\operatorname{im} f \to \ker g$, определим H как коядро этого морфизма.

Задача 4. Можно определить когомологии $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$ двойственным образом, как ядро морфизма $\operatorname{coker} f \to \operatorname{coim} g$. Проверьте, что это определение даёт объект, естественно изоморфный тому, что построен выше.
Задача 5. Определите морфизмы на циклах, границах и когомологиях, индуцированные морфизмом комплексов.
Задача 6. Докажите, что в абелевой категории существуют расслоенные и корасслоенные произведения.

Решив эти задачи, можно убедиться в двух вещах. Во-первых, любые рассуждения, использующие понятия и свойства ядер, коядер, образов, точности, расслоенных произведений и т.п., которые мы проводили для категории модулей (например, существование длинной точной последовательности в когомологиях), можно провести и для произвольных абелевых категорий. Во-вторых, проводить эти рассуждения на категорном языке очень неудобно. Поэтому обычно, работая с абелевыми категориями, действуют так же, как если бы объекты были модулями и у них были бы элементы. В действительности, любое такое рассуждение в стиле диаграммного поиска, оперирующее конечным числом объектов, оказывается законным. Это обеспечивает следующая

Теорема 2 (теорема Митчелла о вложении)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория, класс объектов которой – множество (такие категории называются малыми). Тогда существует точный строго полный функтор $\mathcal{A} \to R{-}\mathrm{mod}$, где R – некоторое кольцо.*

То, что реально интересующие нас абелевы категории малыми не являются, не должно смущать. Объекты абелевой категории $\mathcal{A}$, использующиеся в любом конкретном рассуждении, всегда образуют множество, и можно применять теорему о вложении к малой подкатегории в $\mathcal{A}$, порождённой этими объектами.

Для абелевых категорий и аддитивных функторов между ними строится та же теория, что мы построили для категорий модулей над кольцом. А именно, определяются точные, точные слева и справа функторы, проективные и инъективные объекты, резольвенты, производные функторы, длинные точные последовательности производных функторов, группы Ext как производные функторы от функтора Hom, проективная и инъективная размерности объекта, глобальная гомологическая размерность категории.

Есть ровно одно свойство категорий модулей над кольцом, которое мы активно использовали, и которое необходимо дополнительно требовать для того, чтобы всё описанное выше имело место в заданной абелевой категории. Оно состоит в том, что в категории должно быть достаточно много проективных/инъективных объектов. Если оно выполнено, то все результаты про производные функторы переносятся на случай абелевых категорий.

Однако существуют абелевы категории, в которых недостаточно много проективных или инъективных объектов. Например, в категории конечно порождённых абелевых групп нет нетривиальных инъективных объектов, а в категории когерентных пучков на проективной прямой – нетривиальных проективных. Конструкция производных функторов через проективные/инъективные резольвенты в этом случае не может быть применена. Тем не менее, можно дать их абстрактное определение.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – абелевы категории. *Левым δ-функтором* называется набор функторов $F_i\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}, i \geqslant 0$ и морфизмов функторов $\delta_i\colon F_{i+1}(M) \to F_i(K)$ из категории коротких точных последовательностей $0 \to K \to L \to M \to 0$ объектов $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, для которого выполнено условие: для любой точной тройки $0 \to K \to L \to M \to 0$ длинная последовательность

$$\ldots \to F_{i+1}(M) \xrightarrow{\delta_i} F_i(K) \to F_i(L) \to F_i(M) \xrightarrow{\delta i-1} F_{i-1}(K) \to \ldots$$

точна.

31.03.2016
Лекция 8

Как мы видели, набор левых производных функторов L_iF от точного справа функтора $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и связывающих гомоморфизмов является δ-функтором. Как мы скоро увидим, этот δ-функтор является в соответствующем смысле универсальным.

Морфизмом δ-функторов из (F_i, δ_i) в (F'_i, δ'_i) называется набор функторных морфизмов $\phi_i\colon F_i \to F'_i$ такой, что на категории точных троек вида $0 \to K \to L \to M \to 0$ имеется коммутативная диаграмма морфизмов функторов:

(2)
$$\begin{tikzcd}
F_{i+1}(M) \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "\phi_{i+1}"] & F_i(K) \arrow[d, "\phi_i"] \\
F'_{i+1}(M) \arrow[r, "\delta'_i"] & F'_i(K).
\end{tikzcd}$$

Левый δ-функтор (F_i, δ_i) называется *универсальным*, если для любого δ-функтора (T_i, δ'_i) и любого морфизма функторов $\phi_0\colon T_0 \to F_0$ существует единственный морфизм δ-функторов $(\phi_i)\colon (T_i, \delta'_i) \to (F_i, \delta_i)$, продолжающий ϕ_0. Иными словами, имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{Fun(\mathcal{A},\mathcal{B})}(T_0, F_0) \cong \mathrm{Hom}_{\delta-Fun(\mathcal{A},\mathcal{B})}((T_i, \delta'_i), (F_i, \delta_i)).$$

Можно также понимать этот изоморфизм как сопряжённость двух функторов между категориями $Fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $\delta - Fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: функтор $(T_i, \delta'_i) \mapsto T_0$ сопряжён слева к функтору, строящему по заданному F δ-функтор $(F_i, \delta_i))$ с $F_0 = F$. Из определения сразу следует, что универсальный δ-функтор с заданным F_0 единствен, если существует.

Определение 3. Пусть $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – точный справа функтор между абелевыми категориями. Пусть существует универсальный δ-функтор (F_i, δ_i) с $F_0 = F$. Тогда F_i назовём левыми производными функторами от функтора F.

Наша цель — показать, что классические производные функторы являются производными функторами в смысле данного выше определения. То есть, образуют универсальный δ-функтор. Чтобы это проверить (и вообще, чтобы доказывать универсальность некоторого δ-функтора), полезно следующее понятие.

Функтор F между абелевыми категориями $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется *костирающим*, если для любого объекта M в $\mathcal{A}$ существует эпиморфизм $f\colon M' \to M$ такой, что $F(f) = 0$. Такой эпиморфизм мы будем называть *костирающим накрытием* объекта M (для функтора F). Несложно убедиться в том, что высшие производные функторы $L_iF, i > 0$ от точного справа функтора F костирающие – достаточно взять проективное накрытие.

Предложение 4. *Пусть (F_i, δ_i) – δ-функтор, причём функторы F_i костирающие при $i > 0$. Тогда (F_i, δ_i) – универсальный δ-функтор.*

Доказательство. Пусть (T_i, δ'_i) – δ-функтор и задан морфизм функторов $\phi_0\colon T_0 \to F_0$. Построим морфизмы функторов $\phi_i\colon T_i \to F_i$, удовлетворяющие условиям (2) и попутно увидим, что они единственны.

Предположим, что ϕ_i построены при $i \leqslant n$ и условия (2) выполнены при $i < n$. Построим ϕ_{n+1}. Пусть $M \in \mathcal{A}$ – объект, накроем его объектом P так, чтобы $F_{n+1}(P \to M) = 0$, и рассмотрим точную тройку $0 \to M' \to P \to M \to 0$. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & T_{n+1}(M) \arrow[r, "\delta'_i"] \arrow[d, dashed, "\phi_{n+1}(M)"] & T_n(M') \arrow[r] \arrow[d, "\phi_n(M')"] & T_n(P) \arrow[d, "\phi_n(P)"] \\
F_{n+1}(P) \arrow[r, "0"] & F_{n+1}(M) \arrow[r, "\delta_i"] & F_n(M') \arrow[r] & F_n(P).
\end{tikzcd}$$

В качестве $\phi_{n+1}(M)$ берем единственную стрелку $T_{n+1}(M) \to F_{n+1}(M)$, делающая левый квадрат коммутативным (условие (2)). Необходимо проверить три вещи: независимость ϕ_{n+1} от выбора накрывающей, функториальность и согласованность с δ.

Рассмотрим любой "морфизм костирающих накрытий", т.е. диаграмму

(3)
$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & Q \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & P \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}
$$

где $F_{n+1}(g) = 0$ и $F_{n+1}(g') = 0$.

С ней связана кубическая диаграмма

(4)
$$
\begin{tikzcd}
& T_{n+1}(N) \arrow[rr, "\delta_n'^N"] \arrow[dl, "\phi_{n+1}(N)"'] \arrow[dd, "T_{n+1}(f)" near end] & & T_n(N') \arrow[dl, "\phi_n(N')"'] \arrow[dd, "T_n(f')"] \\
F_{n+1}(N) \arrow[rr, crossing over, "\delta_n^N" near end] \arrow[dd, "F_{n+1}(f)"'] & & F_n(N') & \\
& T_{n+1}(M) \arrow[rr, "\delta_n'^M" near start] \arrow[dl, "\phi_{n+1}(M)"'] & & T_n(M') \arrow[dl, "\phi_n(M')"] \\
F_{n+1}(M) \arrow[rr, "\delta_n^M"] & & F_n(M') \arrow[from=uu, crossing over, "F_n(f')"' near end] &
\end{tikzcd}
$$

Её передняя и задняя грани коммутативны, так как (F_i, δ_i) и (T_i, δ_i') – δ-функторы. Правая грань также коммутативна, так как ϕ_n – морфизм функторов. Верхняя и нижняя грани представляют собой определения $\phi_{n+1}(N)$ и $\phi_{n+1}(M)$.

Сначала рассмотрим такую диаграмму в случае, когда $M = N$, $F = 1_M$. Все грани куба, кроме левой, коммутативны, а δ_n^M – вложение, значит, и левая грань коммутативна. Это означает, что определения $\phi_{n+1}(M)$ при помощи двух накрытий g и g' равносильны. Но для любых двух накрытий $g_1 \colon P_1 \to M$ и $g_2 \colon P_2 \to M$ существует общее большее накрытие $h_1 \colon P \to P_1$ и $h_2 \colon P \to P_2$ так что $g_1 h_1 = g_2 h_2$ и $F_{n+1}(g_1 h_1) = 0$. Тем самым, корректность в определении ϕ_{n+1} доказана.

Чтобы проверить функториальность, рассмотрим морфизм $f \colon N \to M$ и включим его в диаграмму (3). Тогда коммутативность левой грани в (4) покажет то, что ϕ согласовано с f.

Наконец, чтобы показать, что ϕ_{n+1} согласован с δ для точной тройки $0 \to K \to L \to M \to 0$, рассмотрим диаграмму (3), где нижняя строка – тройка $0 \to K \to L \to M \to 0$, $M = N$, $f = 1_M$, $F_{n+1}(g') = 0$ (но не обязательно $F_{n+1}(g) = 0$). В соответствующей кубической диаграмме все грани коммутативны, кроме, возможно, нижней. Так как $T_{n+1}(f)$ – изоморфизм, получаем, что нижняя грань также коммутативна. Это и требовалось проверить. □

Следствие 5. *Классические производные функторы являются производными функторами в смысле определения 3.*

Есть содержательные примеры, когда можно построить левые производные функторы, при том, что проективных резольвент недостаточно много. Мы, однако, разберём их позже, в контексте производного функтора на производной категории.

Сейчас же изучим более простую вещь – вычисление производных функторов при помощи ацикличных резольвент. Как обычно, пусть F – точный справа функтор между абелевыми категориями $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, и пусть производные функторы от F существуют (например, пусть в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов). Объект M называется *F-ацикличным*, если $L_iF(M) = 0$ при $i > 0$. Примеры: проективный объект ацикличен для любого функтора. Плоский модуль ацикличен для функтора тензорного умножения на любой модуль.

Задача 7. Пусть $0 \to K \to L \to M \to 0$ – точная тройка. Докажите, что a) если K и M суть F-ацикличны, то и L тоже F-ацикличен; b) если L и M суть F-ацикличны, то и K тоже F-ацикличен.

Лемма 6. *Пусть $K_\bullet$ – ограниченный справа точный комплекс F-ацикличных объектов из $\mathcal{A}$. Тогда $F(K_\bullet)$ – тоже точный комплекс.*

Доказательство. Если $K_\bullet$ – точная тройка, то утверждение следует из длинной точной последовательности производных функторов и того, что $L_1F(K_0) = 0$. В общем случае, разрежем $K_\bullet$ на точные тройки вида $0 \to Z_{i+1} \to K_i \to Z_{i-1} \to 0$. Пользуясь задачей 7, по индукции проверим, что все Z_i суть F-ацикличны. Применим к каждой точной тройке функтор F, после чего склеим из полученных точных троек точный комплекс $F(K_\bullet)$. □

Оказывается, что вычислять производные функторы от F можно при помощи F-ацикличной резольвенты.

Предложение 7. *Пусть $K_\bullet$ – резольвента для объекта $M \in \mathcal{A}$, все члены которой ацикличны. Тогда $H_i(F(K_\bullet))$ канонически изоморфны $L_iF(M)$.*

Доказательство. Докажем предложение в предположении, что в $\mathcal{A}$ есть достаточно много проективных объектв. Пусть $P_\bullet$ – проективная резольвента M, существует единственный с точностью до гомотопии морфизм $f\colon P_\bullet \to K_\bullet$, индуцирующий 1_M на H_0. Применим F и перейдём к гомологиям, получим однозначно определённые морфизмы $H_i(F(f))\colon L_iF(M) = H_i(F(P_\bullet)) \to H_i(F(K_\bullet))$. Проверим, что это – изоморфизмы.

Для этого покажем, что конус $C(F(f))$ ацикличен. Рассмотрим $C(f)$, конус f. Это точный комплекс, все члены которого F-ацикличны (так как проективные объекты F-ацикличны). По лемме, комплекс $F(C(f)) = C(F(f))$ ацикличен, что и требовалось. □

Ещё одно доказательство. Можно доказать предложение и без предположений о существовании проективных резольвент. Доказывать будем по индукции по i. Рассмотрим точную тройку $0 \to B_0 \xrightarrow{f_0} K_0 \to M \to 0$. Длинная точная последовательность производных функторов даст равенства $L_1F(M) = \ker F(f_0)$ и $L_iF(M) = L_{i-1}F(B_0)$ при $i \geqslant 2$. Разрежем резольвенту на точные тройки $0 \to B_i \xrightarrow{f_i} K_i \xrightarrow{e_i} B_{i-1} \to 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(K_2) \arrow[rr, "F(d_2)"] \arrow[dr, "F(e_2)"'] & & F(K_1) \arrow[rr, "F(d_1)"] \arrow[dr, "F(e_1)"'] & & F(K_0) \\
& F(B_1) \arrow[ur, "F(f_1)"'] & & F(B_0). \arrow[ur, "F(f_0)"'] &
\end{tikzcd}$$

Так как F точен справа, $F(e_2)$ сюръективно и последовательность

$$F(B_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(K_1) \xrightarrow{F(e_1)} F(B_0) \to 0$$

точна. Имеем

$$H_1(F(K_\bullet)) = \ker F(d_1)/\operatorname{im} F(d_2) = \ker F(d_1)/\operatorname{im} F(f_1) = \\ = \ker F(d_1)/\ker F(e_1) = \ker F(f_0) = L_1F(M),$$

что доказывает предложение для $i = 1$. Для шага индукции достаточно применить предположение индукции к ацикличной резольвенте $\ldots \to K_2 \to K_1 \to 0$ объекта B_0. $\square$