Спектральные последовательности

В прошлый раз мы закончили тем, что обсудили когомологии пучков — производные функторы от функтора глобальных сечений на категории пучков абелевых групп или пучков модулей над пучком колец.

Сегодня мы поговорим про другие важные примеры аддитивных функторов на категории пучков — глобальные и локальные функторы Hom, а также функтор Tor.

Функтор Hom. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на топологическом пространстве X. Тогда категория $\mathcal{R}-\mathrm{mod}$ пучков модулей над $\mathcal{R}$ — абелева категория, и определен **функтор морфизмов** $\mathrm{Hom}(-,-) : (\mathcal{R}-\mathrm{mod})^\circ \times (\mathcal{R}-\mathrm{mod}) \to \mathcal{A}b$. Соответствующие производные функторы $\mathrm{Ext}^i(-,-)$ и $R\,\mathrm{Hom}(-,-)$ можно определить как произодные функторы по второму аргументу при помощи инъективных резольвент в категории пучков $\mathcal{R}$-модулей.

Функтор Tor. Также, как и на категории модулей над кольцом, определен **функтор тензорного умножения** $(\mathrm{mod}-\mathcal{R}) \times (\mathcal{R}-\mathrm{mod}) \to \mathcal{A}b$. А именно, для пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ определим $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}$ как пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{R}(U)} \mathcal{G}(U)$.
Задача 1. Проверьте, что тензорное умножение пучков коммутирует с ограничением: $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G})|_U \cong \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{R}|_U} \mathcal{G}|_U$ и с переходом к слою: $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G})|_x \cong \mathcal{F}|_x \otimes_{\mathcal{R}|_x} \mathcal{G}|_x$.

Функтор тензорного умножения точен справа по каждому из аргументов. Однако определить левые производные функторы при помощи проективных резольвент затруднительно: проективных объектов часто бывает недостаточно. Поэтому мы воспользуемся аксиоматическим определением производного функтора и докажем существование левого производного функтора от $\mathcal{F} \otimes -$ на категории $\mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod})$ при помощи следующей конструкции.

Определение 1. Пусть класс объектов $\mathcal{P}$ абелевой категории $\mathcal{A}$ обладает двумя свойствами относительно функтора $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$:

1. любой объект из $\mathcal{A}$ накрывается некоторым объектом из $\mathcal{P}$;
2. если $K_\bullet$ – точный ограниченный справа комплекс объектов из $\mathcal{P}$, то комплекс $F(K_\bullet)$ точен.

Тогда класс $\mathcal{P}$ называется *приспособленным слева* к функтору F.

Примеры. В категории модулей над кольцом класс проективных объектов приспособлен слева к любому функтору, точному справа. Также, класс свободных модулей приспособлен слева к любому функтору, точному справа. Класс вялых пучков приспособлен справа к функтору глобальных сечений на категории пучков модулей над пучком колец.

Предложение 2. *Пусть $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – функтор между абелевыми категориями. Пусть $\mathcal{P}$ – класс объектов в $\mathcal{A}$, приспособленный слева к функтору F. Тогда существует глобальный производный функтор $LF\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$. Также существует универсальный левый δ-функтор (F_i, δ_i) из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ с $F_0 = F$.*

Доказательство мы проведём в абстрактном контексте локализации функтора относительно тринагулированной подкатегории.

Лемма 3. *Пусть $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ – точный функтор между триангулированными категориями, а $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ – триангулированная подкатегория, замкнутая относительно изоморфизмов. Предположим, что есть триангулированная подкатегория $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ такая, что $F(\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{N}) = 0$ и для любого объекта $X \in \mathcal{T}$ найдётся морфизм $f\colon F \to X$, где $F \in \mathcal{T}_0$ и конус f лежит в $\mathcal{N}$. Тогда у F существует левая локализация по $\mathcal{N}$.*

Доказательство.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_0 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "Q_0"] \arrow[rr, bend left, "F_0"] & \mathcal{T} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"] & \mathcal{T}' \\ \mathcal{T}_0/(\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{N}) \arrow[r, "\bar{\sigma}", "\sim"'] \arrow[rru, bend right, "\bar{F}_0"'] & \mathcal{T}/\mathcal{N}. \arrow[ru, "LF"] & \end{tikzcd}$$

Вложение $\sigma\colon \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ индуцирует естественный функтор $\bar{\sigma}\colon \mathcal{T}_0/(\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{N}) \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$. Он будет строго полным (это доказывается аналогично тому, как мы доказывали, что два определения ограниченной производной категории эквивалентны). Кроме того, он будет существенно сюръективным, так как у любого объекта из $\mathcal{T}$ есть резольвента объектом из $\mathcal{T}_0$. Поэтому $\bar{\sigma}$– эквивалентность. Композиция $F_0 = F\sigma$ переводит $\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{N}$ в ноль, поэтому пропускается через функтор $\bar{F}_0\colon \mathcal{T}_0/(\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{N})$. Определим LF как $\bar{F}_0 \circ (\bar{\sigma})^{-1}$. Можно определить морфизм $LF \circ Q \to F$ и показать, что он будет левой локализацией F. □

Доказательство предложения 2. Всё следует из леммы 3. Нужно рассмотреть функтор F между триангулированными категориями $\mathcal{T} = \mathrm{K}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B}) = \mathcal{T}'$, полную подкатегорию ацикличных комплексов $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ и полную подкатегорию $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$, образованную комплексами, у которых все члены лежат в $\mathcal{P}$. Тогда условие $F(\mathcal{N} \cap \mathcal{T}_0)$ выполнено по предположению. А то, что у любого объекта $\mathcal{T}$ есть резольвента объектом из $\mathcal{T}_0$, доказывается так же, как и для проективных резольвент ограниченных справа комплексов модулей над кольцом. Значит, согласно лемме 3, существует производный функтор LF. □

Задача 2. Докажите вторую часть предложения.

Следствие 4. *В предположениях предложения 2 имеем* $LF(K_\bullet) = F(P(K)_\bullet)$*, где* $P(K)_\bullet$ *– резольвента комплекса* $K_\bullet \in \mathrm{Kom}^-(\mathcal{A})$ *с членами, лежащими в* $\mathcal{P}$*.*

Доказательство. Следует из доказательства леммы 3. □

Теперь мы готовы определить производное тензорное умножение. Для этого нужно применять обычное тензорное умножение к плоским резольвентам. Пучок (правых) $\mathcal{R}$-модулей $\mathcal{F}$ назыается *плоским* (слева), если функтор $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} -$ точен.

Предложение 5. *Пусть* $\mathcal{F}$ *– пучок* $\mathcal{R}$*-модулей на топологическом пространстве* X*. Тогда класс плоских пучков* $\mathcal{R}$*-модулей приспособлен слева к функтору* $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} -$*. Существует левый производный функтор* $\mathcal{D}^-(\mathcal{R}{-}\mathrm{mod}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{R}{-}\mathrm{mod})$ *от функтора* $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} -$*.*

Доказательство. Покажем, что плоские пучки образуют приспособленный класс. Для этого нужно установить два условия. То, что плоских пучков достаточно много, мы проверем в лемме 6 ниже, сейчас покажем, что тензорное умножение на $\mathcal{F}$ переводит ограниченные справа точные комплексы плоских модулей в точные комплексы. Точность комплекса пучков можно проверять послойно, взятие слоя перестановочно с тензорным умножением, а слой плоского пучка – плоский модуль над $\mathcal{R}_x$. Поэтому проверка сводится к случаю категории модулей над кольцом, где соответствующий факт был доказан в лекции про абелевы категории (функторы Tor можно вычислять через $\otimes$-ацикличные резольвенты).

Существование производного функтора теперь прямо следует из предложения 2. □

Лемма 6. *В категории* $\mathcal{R}{-}\mathrm{mod}$ *достаточно много плоских объектов.*

Доказательство. Структурный пучок $\mathcal{R}$ плоский. Несложно также видеть, что плоским будет пучок $j_!j^*\mathcal{R}$ для любого открытого вложения подмножества $j\colon U \to X$. Пусть $\mathcal{F}$ – произвольный пучок $\mathcal{R}$-модулей. Выберем множество $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ его сечений, которое порождает слои $\mathcal{F}$ во всех точках (например, можно взять множество всех сечений на всех открытых множествах). Всякое сечение определяет морфизм $j_!j^*\mathcal{R} \to \mathcal{F}$, так как $\mathrm{Hom}_X(j_!j^*\mathcal{R}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{U_i}(j^*\mathcal{R}, j^*\mathcal{F}) \ni s_i$. Рассмотрим их сумму: это морфизм $\oplus_i j_!j^*\mathcal{R} \to \mathcal{F}$. Очевидно, он сюръективный и пучок $\oplus_i j_!j^*\mathcal{R}$ плоский. □

Левый производный функтор от $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{R}}-$ обозначают $\mathcal{F}\otimes^L_{\mathcal{R}}-$. Классические производные функторы теперь можно определить через когомологии:

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = H_i(\mathcal{F} \otimes^L_{\mathcal{R}} \mathcal{G}).$$

Несложно проверить, что они образуют универсальный δ-функтор.

Функтор $\mathcal{H}om$.

Определим функтор **локальных морфизмов** $(\mathcal{R}{-}\mathrm{mod})^\circ \times (\mathcal{R}{-}\mathrm{mod}) \to \mathcal{S}h_{\mathcal{A}b}$. А именно, для пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ определим $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ как пучок $U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ (проверьте, что это пучок).

Производные функторы $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i(-,-)$ от локальных морфизмов называются *локальными* Ext*'ами*, их можно вычислять по второму аргументу при помощи инъективной резольвенты. Название объясняется следующим фактом:

Задача 3. Покажите, что $\mathcal{E}\mathrm{xt}$ коммутирует с ограничениями на открытые подмножества:

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U = \mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathcal{R}|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$

Также можно определить глобальный производный функтор

$$R\,\mathcal{H}om(\mathcal{F}, -)\colon \mathcal{D}^+(\mathcal{R}{-}\mathrm{mod}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{S}h_{\mathcal{A}b}).$$

Если пучок колец $\mathcal{R}$ образован коммутативными кольцами, то $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ и $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ будут пучками $\mathcal{R}$-модулей, а не просто абелевых групп.

На практике функторы Tor и $\mathcal{E}\mathrm{xt}$ удобно вычислять при помощи локально свободных резольвент, а не плоских/инъективных резольвент. Так, на проективном пространстве у любого когерентного пучка существует конечная локально свободная резольвента. В общем случае это требование ложится в основу определения когерентного пучка: пучок называется когерентным, если локально представляется как коядро морфизма между свободными пучками конечного ранга. Мы же будем интересоваться тем случаем, когда в категории $\mathcal{R} - \mathrm{f.g.mod}$ конечно порождённых $\mathcal{R}$-модулей достаточно много локально свободных пучков.

Задача 4. a) Пусть $\mathcal{F}$ – локально свободный пучок конечного ранга, а $\mathcal{G}$ – ещё один пучок $\mathcal{R}$-модулей, тогда $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$ для любой точки $x \in X$.

b) Покажите, что для свободного пучка $\mathcal{F}$ бесконечного ранга предыдущее утверждение не обязательно верно.

c) Пусть $\mathcal{F}_\bullet$ – ограниченный справа точный комплекс локально свободных пучков конечного ранга, тогда комплекс $\mathcal{H}om(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{G})$ точен.

Предложение 7. *Пусть в категории* $\mathcal{R} - \mathrm{f.g.mod}$ *конечно порождённых пучков* $\mathcal{R}$-*модулей достаточно много локально свободных пучков. Тогда локально свободные пучки конечного ранга образуют класс, приспособленный слева к функтору* $\mathcal{H}om(-, \mathcal{G})$, *где* $\mathcal{G}$ *— некоторый пучок* $\mathcal{R}$-*модулей. Следовательно, определен правый производный функтор* $R\,\mathcal{H}om(-, \mathcal{G})$ *на категории* $\mathcal{R} - \mathrm{f.g.mod}$.

Доказательство. То, что локально свободные пучки образуют приспособленный класс, следует из предположений и из предыдущей задачи. Существование производного функтора следует из предложения 2. □

Также при помощи локально свободных пучков можно вычислять функторы Tor, так как локально свободные пучки являются плоскими.

Можно показать, что функторы $\mathcal{E}\mathrm{xt}$ и Tor, определённые как производные функторы по первому и по второму аргументу, изоморфны. Кроме того, можно определить производные функторы

$$R\operatorname{Hom}\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod})\times\mathcal{D}^+(\mathcal{R}-\mathrm{mod})\to\mathcal{D}^+(\mathcal{A}b),$$
$$R\,\mathcal{H}om\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{R}-\mathrm{mod})\times\mathcal{D}^+(\mathcal{R}-\mathrm{mod})\to\mathcal{D}^+(\mathcal{S}h_{\mathcal{A}b}),$$

у которых оба аргумента — комплексы, аналогично для $\otimes^L$. Этим всем мы не будем заниматься.

Как, зная $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$, вычислить $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$? Насколько близок комплекс $F(K_\bullet)$ к производному функтору $LF(M)$, если $K_\bullet$ – какая-то резольвента M, не обязательно приспособленная к функтору F? На эти и другие вопросы помогают ответить спектральные последовательности.

Что такое спектральная последовательность? *Спектральной последовательностью* называется следующий набор данных:

1. последовательность биградуированных объектов $E_k^{p,q}$ $(p,q\in\mathbb{Z},\mathsf{k}\in\mathbb{N})$ некоторой абелевой категории $\mathcal{A}$ (говорят, что объекты $E_k^{\bullet\bullet}$ образуют k-й лист);

2. набор дифференциалов $d_k^{p,q}\colon E_k^{p,q}\to E_k^{p+k,q-k+1}$ таких, что $d^2=0$;

3. набор изоморфизмов $\ker d_k^{p,q}/\operatorname{im} d_k^{p-k,q+k-1}\to E_{k+1}^{p,q}$.

Объекты следующего листа строятся как когомологии дифференциалов на предыдущем листе, а вот дифференциалы на следующем листе не определяются предыдущим. Говорят, что последовательность *сходится*, если для любых p,q начиная с некоторого k члены $E_k^{p,q}$ перестают меняться (т.е. $d_k^{p,q}=d_k^{p-k,q+k-1}=0$). В таком случае определён бесконечный лист $E_\infty^{p,q}$. Говорят, что последовательность сходится к градуированному объекту E^n, если существует регулярная убывающая фильтрация $\ldots\supset F_pE^n\supset F_{p+1}E^n\supset\ldots$ (т.е. $\cap_pF_pE^n=0,\cup_pF_pE^n=E^n$), для которой

$$F_pE^{p+q}/F_{p+1}E^{p+q}\cong E_\infty^{p,q}.$$

Лемма 8. *Пусть спектральная последовательность сосредоточена в* 1*-м или* 3*-м координатом углу. Тогда она сходится.*

Доказательство. Очевидно. □

Если листы спектральной последовательности перестают меняться, начиная с k-го, то говорят, что последовательность *вырождается на k-м члене.*

Как строить спектральные последовательности? Мы рассмотрим одну конструкцию, частным случаем которой будут все интересующие нас примеры, – спектральную последовательность фильтрованного комплекса.

Пусть $K^\bullet$ – комплекс объектов абелевой категории $\mathcal{A}$. Пусть у $K^\bullet$ задана убывающая фильтрация подкомплексами $F_pK^\bullet \subset K^\bullet$. Построим спектральную последовательность следующим образом.

Определим сначала $Z_k^{p,q}$:

$$Z_k^{p,q} = F_pK^{p+q} \cap d^{-1}(F_{p+k}K^{p+q+1}).$$

Это немного больше, чем циклы в $F_pK^{p,q}$. В $Z_k^{p,q}$ есть подобъекты: $Z_{k-1}^{p+1,q-1}$ и $dZ_{k-1}^{p-k+1,q+k-2}$. Определим $E_k^{p,q}$ как фактор

$$E_k^{p,q} = Z_k^{p,q}/(Z_{k-1}^{p+1,q-1} + dZ_{k-1}^{p-k+1,q+k-2}).$$

Замечание 9. Заметим, что $Z_0^{p,q} = Z_{-1}^{p,q} = F_pK^{p+q}$. Поэтому

$$E_0^{p,q} = F_pK^{p+q}/(F_{p-1}K^{p+q} + dF_{p-1}K^{p+q-1}) = F_pK^{p+q}/F_{p-1}K^{p+q}.$$

Задача 5. Проверьте, что d – дифференциал комплекса $K_\bullet$ – переводит $Z_k^{p,q}$ в $Z_k^{p+k,q-k+1}$, а $Z_{k-1}^{p+1,q-1} + dZ_{k-1}^{p-k+1,q+k-2}$ – в $Z_{k-1}^{p+k+1,q-k} + dZ_{k-1}^{p+1,q-1}$ и тем самым индуцирует морфизм

$$d_k^{p,q}\colon E_k^{p,q} \to E_k^{p+k,q-k+1}.$$

Можно проверить, что справедлив следующий факт:

Лемма 10. *Для определённых выше $E_k^{p,q}$ и $d_k^{p,q}$ верно, что*

$$\ker d_k^{p,q}/\operatorname{im} d_k^{p-k,q+k-1} \cong E_{k+1}^{p,q}.$$

Таким образом, получаем спектральную последовательность.

Предложение 11. *Предположим, что на каждом члене K^i фильтрация конечна: $F_pK^i = K_i$ при $p << 0$, $F_pK^i = 0$ при $p >> 0$. Тогда спектральная последовательность сходится к $E^n = H^n(K^\bullet)$.*

Доказательство. Вложения подкомплексов $F_pK^\bullet \to K^\bullet$ индуцируют гомоморфизмы когомологий $H^n(F_pK^\bullet) \to H^n(K^\bullet)$. Обозначим их образы через $F_pH^n(K^\bullet)$. Из условия следует, что при больших p $F_pH^n(K^\bullet) = 0$, а при маленьких p – $F_pH^n(K^\bullet) = H^n(K^\bullet)$. Получаем регулярную фильтрацию на когомологиях $K^\bullet$. Покажем, что к ней и сходится спектральная последовательность.

При больших k имеем $Z_k^{p,q} = Z(K^\bullet) \cap F_pK^{p+q}$ и $dZ_{k-1}^{p-k+1,q+k-2} = B(K^\bullet) \cap F_pK^{p+q}$. Следовательно, при больших k

$$\begin{aligned} E_\infty^{p,q} = E_k^{p,q} = Z_k^{p,q}/(Z_{k-1}^{p+1,q-1} + dZ_{k-1}^{p-k+1,q+k-2}) = \\ = (Z(K^\bullet) \cap F_pK^{p+q})/(B(K^\bullet) \cap F_pK^{p+q} + Z(K^\bullet) \cap F_{p+1}K^{p+q}) = \\ = F_pH^{p+q}(K)/F_{p+1}H^{p+q}(K), \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Задача 6. Вычислите спектральную последовательность, связанную с канонической фильтрацией комплекса $K^\bullet$ подкомплексами $(\tau_{\leqslant p}K)^\bullet$.
Задача 7. Вычислите спектральную последовательность, связанную с фильтрацией, состоящей из одного подкомплекса в комплексе.

Другая важная для нас конструкция – спектральная последовательность бикомплекса. Она связана с естественными фильтрациями на свёртке бикомплекса.

Пусть $K^{\bullet\bullet}$ – бикомплекс. Введём на $Tot^{\bullet}(K)$ горизонтальную фильтрацию:

$$F_m Tot^n(K) = \oplus_{p+q=n, p\geqslant m} K^{p,q}.$$

Если на каждой диагонали $p+q = const$ находится конечное число членов бикомплекса, то эта фильтрация будет регулярной, и соответствующая спектральная последовательность будет сходиться к когомологиям свёртки бикомплекса. Вычислим её явно.

У бикомплекса определены два типа когомологий – относительно горизонтальных дифференциалов и относительно вертикальных, их обозначают $H_I^{p,q}(K)$ и $H_{II}^{p,q}(K)$, аналогично для циклов и границ. Вертикальные дифференциалы индуцируют морфизмы $H_I^{p,q}(K) \to H_I^{p,q+1}(K)$, можно вычислить кратные когомологии $H_{II}H_I^{p,q}(K)$ относительно этих дифференциалов.

Предложение 12. *В спектральной последовательности бикомплекса, связанной с горизонтальной фильтрацией,*

$$E_0^{p,q} = K^{p,q}, \qquad E_1^{p,q} = H_{II}^{p,q}(K), \qquad E_2^{p,q} = H_I H_{II}^{p,q}(K).$$

Доказательство. По определению, имеем

$$E_0^{p,q} = F_p Tot^{p+q} K / F_{p-1} Tot^{p+q} K = K^{p,q}.$$

Вычисляя когомологии вертикального дифференциала d_{II}, получаем $E_1^{p,q} = \ker d_{II}^{p,q} / \operatorname{im} d_{II}^{p,q-1} = H_{II}^{p,q}(K)$. Вычисляя когомологии относительно d_1, получаем выражение для E_2. □

Аналогично можно рассматривать вертикальную фильтрацию и связанную с ней спектральную последовательность.

Пример: спектральная последовательность Ходжа – де Рама.

Теперь ответим на второй вопрос. Пусть $K_{\bullet}$ – резольвента объекта M абелевой категории $\mathcal{A}$, а $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – точный справа функтор. Пусть для простоты в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Выберем у каждого K_i проективную резольвенту $P_{i\bullet}$ и продолжим дифференциалы d_i^K до морфизма резольвент. Как мы увидим ниже, их можно выбрать так, чтобы получить бикомплекс $P_{i,j}$. Он сосредоточен в 3-м координатном углу. Рассмотрим спектральную последовательность, связанную с горизонтальной фильтрацией этого бикомплекса. Получим $E_1^{p,q} = 0$ при $q \neq 0$, $E_1^{p,0} = K^p$. Вычисляя следующий член, получаем $E_2^{p,q} = 0$ при $q \neq 0$ или $p \neq 0$, $E_2^{0,0} = M$. Ясно, что $E_2 = E_\infty$ и, следовательно, мы знаем когомологии свёртки $Tot_{\bullet}(P)$ – они равны $M[0]$. Т.е. комплекс $Tot_{\bullet}(P)$ – проективная резольвента объекта M и, значит,

$$L_i F(M) = H_i(F(Tot_{\bullet}(P_{\bullet\bullet}))) = H_i(Tot_{\bullet}(F(P_{\bullet\bullet}))).$$

Эти когомологии можно вычислять при помощи спектральной последовательности, связанной с горизонтальной фильтрацией бикомплекса $F(P_{\bullet\bullet})$. По определению производных функторов, имеем $E_1^{pq} = L_{-q}F(K^p)$. Мы доказали

Предложение 13. *Пусть в абелевой категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Пусть $K_{\bullet}$ – резольвента объекта M, а $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – точный справа функтор. Тогда существует спектральная последовательность с*

$$E_1^{pq} = L_{-q}F(K_{-p}),$$

сходящаяся к $E^n = L_{-n}F(M)$.

Заметим, что из этого предложения моментально вытекает то, что производные функторы можно вычислять при помощи ацикличных резольвент.

Наконец, ответим на первый вопрос о связи локальных и глобальных Ext'ов. Это естественно делать в более общем контексте производного функтора от композиции.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – абелевы категории, а $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ – аддитивные функторы, точные справа. Как связаны производные функторы от GF, G и F?

Предложение 14. *Предположим, что существуют классы объектов $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{P}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$, приспособленные слева к функторам F и G соответственно. Пусть $F(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{B}}$. Тогда производный функтор $L(GF)$ существует и изоморфен $LG \circ LF$.*

Доказательство. Во-первых, класс $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ приспособлен к функтору GF слева, так как GF переводит ограниченные справа точные комплексы объектов из $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ в точные. Следовательно, производный функтор $L(GF)$ существует. Далее, обозначая через F, G и GF функторы между гомотопическими категориями, а через Q локализации, мы имеем морфизмы функторов $LF \circ Q \to QF$ и $LG \circ Q \to QG$, а также их композицию $LG \circ LF \circ Q \to LG \circ Q \circ F \to QGF$. По определению производного функтора, она пропускается через канонический морфизм $LG \circ LF \to L(GF)$. Покажем, что этот морфизм – изоморфизм. Действительно, пусть $P_\bullet \in \mathrm{Kom}^-(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})$ – резольвента для комплекса $K_\bullet \in \mathrm{Kom}^-(\mathcal{A})$. Тогда $LF(K_\bullet)$ изоморфен $F(P_\bullet)$, причём последний комплекс лежит в $\mathrm{Kom}^-(\mathcal{P}_{\mathcal{B}})$ и поэтому $LG(LF(K_\bullet)) \cong G(F(P_\bullet))$. С другой стороны, $L(GF)(\mathrm{K}_\bullet)$ также изоморфно $GF(P_\bullet)$, что и требовалось. $\square$

Замечание 15. Заметим, что без дополнительных предположений равенство $L(GF) \cong LG \circ LF$ неверно. В качестве примера возьмём $\mathcal{A} = \mathcal{C} = \mathbb{C}-\mathrm{mod}$, $\mathcal{B} = \mathbb{C}[x]-\mathrm{mod}$. Пусть $F\colon \mathbb{C}-\mathrm{mod} \to \mathbb{C}[x]-\mathrm{mod}$ и $G\colon \mathbb{C}[x]-\mathrm{mod} \to \mathbb{C}-\mathrm{mod}$ есть соответственно сужение и расширение скаляров при гомоморфизме $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$, переводящем x в 0. Иными словами, F есть тавтологический функтор, вводящий на $\mathbb{C}$-векторном пространстве тривиальное действие переменной x, а $G(-) = - \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x]/(x)$. Функтор F точен, функтор G точен справа, но не точен. Например, $L_1G(\mathbb{C}) = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{C}[x]}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Поэтому композиция производных функторов $LG \circ LF$ не сводится к почленному применению F и G. Так, $LG(LF(\mathbb{C})) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[1]$. В то же время, GF есть тождественный функтор, а значит и $L(GF)$ — также тождественный.

Теперь выразим равенство $L(GF) = LG \circ LF$ на языке спектральной последовательности классических производных функторов. Для этого нам понадобится достраивать комплексы почленными проективными резольвентами до бикомплексов, обладающих хорошими свойствами.

Бикомплекс $K_{\bullet\bullet}$ называется (проективной) *резольвентой Картана-Эйленберга* комплекса $L_\bullet$, если

- для любого i комплекс $K_{i\bullet}$ – проективная резольвента для L_i;
- для любого i комплекс $Z^I(K_{i\bullet})$ – проективная резольвента для $Z_i(L)$;
- для любого i комплекс $B^I(K_{i\bullet})$ – проективная резольвента для $B_i(L)$;
- для любого i комплекс $H^I(K_{i\bullet})$ – проективная резольвента для $H_i(L)$;
- точные тройки $0 \to Z^I_{i,j}(K) \to K_{i,j} \to B^I_{i+1,j}(K) \to 0$ и $0 \to B^I_{i,j}(K) \to Z^I_{i,j}(K) \to H^I_{i,j}(K) \to 0$ расщепимы при всех i, j.

Несложно видеть, что свёртка резольвенты Картана-Эйленберга будет проективной резольвентой для $L_\bullet$, если в резольвенте Картана-Эйленберга на каждой диагонали $p + q = const$ находится конечное число членов. Это выполнено, если комплекс $L_\bullet$ ограничен справа или $\mathcal{A}$ имеет конечную гомологическую размерность.

Предложение 16. *Пусть в абелевой категории достаточно много проективных объектов. Тогда у любого комплекса $L_\bullet$ существует резольвента Картана-Эйленберга.*

Доказательство. Воспользуемся следующим фактом, доказанным ранее: если $0 \to K \to L \to M \to 0$ – точная тройка, то для любых проективных резольвент $P(K)_\bullet$ и $P(M)_\bullet$ существует проективная резольвента $P(L)_\bullet$ и почленно расщепимая точная тройка резольвент $0 \to P(K)_\bullet \to P(L)_\bullet \to P(M)_\bullet \to 0$, согласованная с исходной точной тройкой.

Построим сначала произвольным образом проективные резольвенты для $H_i(L)$ и $B_i(L)$. Рассмотрим точные тройки $0 \to B_i(L) \to Z_i(L) \to H_i(L) \to 0$. Дополним их до троек проективных резольвент, как указано выше. Затем рассмотрим точные тройки $0 \to Z_i(L) \to L_i \to B_{i+1}(L) \to 0$ и снова дополним их до троек резольвент, как описано выше. Теперь склеим все точные тройки резольвент в бикомплекс, очевидно, требуемые свойства будут выполнены. $\square$

Предложение 17. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – абелевы категории, а $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ – точные справа функторы. Пусть в $\mathcal{A}$ и в $\mathcal{B}$ достаточно много проективных объектов, в $\mathcal{B}$ имеется класс объектов $\mathcal{P}_\mathcal{B}$, приспособленный слева к G, и пусть $F(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{P}_\mathcal{B}$. Тогда для любого объекта $M \in \mathcal{A}$ имеется спектральная последовательность с $E_2^{p,q} = L_{-p}G(L_{-q}F(\mathcal{A}))$, сходящаяся к $E^n = L_{-n}(GF)(M)$.*

Доказательство. Пусть $P_\bullet$ – проективная резольвента M. По предложению 14, $L(GF)(M)$ можно вычислять как $LG(LF(M)) \cong LG(F(P_\bullet))$. Построим резольвенту Картана-Эйленберга $K_{\bullet\bullet}$ для $F(P_\bullet)$. Свёртка $Tot_\bullet(K)$ будет проективной резольвентой для $F(P_\bullet)$, поэтому $G(Tot_\bullet(K)) \cong LG(F(P_\bullet)) \cong L(GF)(M)$. Гомологии свёртки $G(Tot_\bullet(K)) = Tot_\bullet(G(K))$ вычислим при помощи спектральной последовательности, связанной с вертикальной фильтрацией. Так как строки резольвенты Картана-Эйленберга имеют тривиальные дифференциалы (проекции и вложения прямых слагаемых), вычисление горизонтальных когомологий $H^I(G(K_{\bullet\bullet}))$ коммутирует с применением G. Поэтому $H^I(G(K_{\bullet\bullet})) = G(H^I(K_{\bullet\bullet}))$. С другой стороны, горизонтальные когомологии $H^I(K_{i\bullet})$ – проективная резольвента для $H_i(F(P_\bullet))$. Поэтому

$$H^{II}H^I(G(K))_{i,j} = H^{II}G(H^I(K))_{i,j} = L_jG(H_i(F(P_\bullet))) = L_jG(L_iF(M)).$$

Индексы p и q в формулировке перепутаны местами. Это сделано для того, чтобы получить привычное направление дифференциалов: после взятия спектральной последовательности, связанной с вертикальной фильтрацией, нужно отразить листы относительно диагонали. $\square$

Из определений следует, что $\mathrm{Hom}_\mathcal{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{H}om_\mathcal{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$. Рассматривая $\mathcal{H}om$ как функтор по второму аргументу, можно применить утверждение про композицию производных функторов:

$$\mathcal{R}\text{–mod} \xrightarrow{\mathcal{H}om(\mathcal{F},-)} \mathcal{R}\text{–mod} \xrightarrow{\Gamma(X,-)} \mathcal{A}b.$$

Если ограничиться инъективными пучками вида $I = \prod_x I_x$ (этого можно и не делать, см. задачу ниже), то пучки $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, I)$ также будут иметь вид $\prod_x I_x$, и будут вялыми. Поэтому можно применить предыдущее предложение (точнее, его аналог для точных слева функторов), взяв в качестве $\mathcal{P}_\mathcal{B}$ класс вялых пучков. Получаем

Следствие 18. *Существует спектральная последовательность с*

$$E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{E}\mathrm{xt}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})),$$

сходящаяся к $E^n = \mathrm{Ext}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. *Имеется точная последовательность*

$$0 \to H^1(X, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{E}\mathrm{xt}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \to H^2(X, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Задача 8. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – пучки $\mathcal{R}$-модулей, причём $\mathcal{G}$ инъективный. Тогда пучок $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ вялый.

Задача 9. Пусть $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — точный справа функтор, в $\mathcal{A}$ достаточно проективных объектов. Пусть $K_\bullet \in \mathrm{Kom}^-(\mathcal{A})$ — ограниченный справа комплекс. Постройте спектральную последовательность с $E_2^{p,q} = L_{-p}F(H_{-q}(K))$, сходящуюся к $E^n = H^n(LF(K))$.