

Топологические пространства

Задача 2.0. Опишите все топологии (с точностью до гомеоморфизма) на множестве а) из 2; б) из 3 элементов.

Задача 2.1. а) Введите «естественную» топологию на $\mathbb{R}P^n$, $\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})$.

б) Докажите, что $\mathbb{R}P^n$ связно и компактно.

Задача 2.2. а) Пространство X связно тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение $X \rightarrow \{0, 1\}$ постоянно.

б) Если X связное пространство, то для функций на нем выполняется теорема о промежуточном значении.

Задача 2.3. Замыкание графика функции $\cos(1/x)$ связно, но не линейно связно.

Задача 2.4. Открытое подмножество \mathbb{R}^n связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

Задача 2.5. Замкнутое подпространство компакта — компакт.

Задача 2.6. Компактное подпространство хаусдорфова пространства замкнуто в нем.

Задача 2.7. а) Непрерывное биективное отображение из компактного пространства в хаусдорфово — гомеоморфизм.

б) Существенно ли требование хаусдорфовости?

Задача 2.8. Будем называть множество целых чисел открытым, если оно является объединением арифметических прогрессий.

а) Это топология на множестве целых чисел.

б) Арифметическая прогрессия в этой топологии не только открыта, но и замкнута.

в) Выведите отсюда, что простых чисел бесконечно много.

УКАЗАНИЕ. Множество $\{-1, 1\} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup(p)$ не может быть открытым.