

## Гомотопии

**Задача 6.1.** Любое не сюръективное отображение а) в  $S^1$ ; б) в  $S^n$  гомотопно постоянному.

**Задача 6.2.** Может ли связное пространство быть гомотопически эквивалентно несвязному?

**Задача 6.3.** Лента Мёбиуса гомотопически эквивалентна окружности.

**Задача 6.4.** Докажите, что связный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей, и объясните, как найти число этих окружностей по  $V$  и  $E$ .

**Задача 6.5.** Докажите, что сфера с  $g$  ручками и  $n$  выколотыми точками гомотопически эквивалентна букету окружностей, и найдите число этих окружностей.

**Задача 6.6.** а)  $\mathbb{R}P^n$  без точки гомотопически эквивалентно  $\mathbb{R}P^{n-1}$ ;

б)  $\mathbb{C}P^n$  без точки гомотопически эквивалентно  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .

**Задача 6.7.** Следующие пространства гомотопически эквивалентны:

1)  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$  (окружность вложена стандартным образом);

2) сфера, вместе с отрезком, соединяющим полюса;

3) сфера с двумя склеенными точками;

4)  $S^2 \vee S^1$ .

**Задача 6.8.** Пусть  $X$  — дополнение к координатным осям а) в  $\mathbb{R}^3$  б\*) в  $\mathbb{C}^3$ . Докажите, что  $X$  гомотопически эквивалентно букету сфер (какому именно?).

**Задача 6.9.** Пусть  $\mathbb{R}^\infty$  — множество финитных (обращающихся с какого-то момента в ноль) последовательностей вещественных чисел с евклидовой метрикой;  $S^\infty$  — сфера в этом пространстве (все точки на расстоянии 1 от нуля). Докажите, что  $S^\infty$  стягиваемо.