

Векторные поля

Задача 7.1. Чему равен индекс векторного поля $z \mapsto z^n$ (вдоль кривой, не проходящей через ноль)?

Полезно еще нарисовать соответствующие векторное поля и их траектории.

Задача 7.2. Векторное поле, заданное на границе кольца, может быть продолжено до векторного поля на всем кольце без особых точек тогда и только тогда, когда индексы вдоль обеих граничных окружностей равны.

Задача 7.3. Докажите (не пользуясь теоремой Пуанкаре–Хопфа), что сумма индексов особых точек векторного поля на сфере равна 2 (в частности, «ежа нельзя причесать»: любое векторное поле на сфере имеет хотя бы одну особую точку).

Задача 7.4. Постройте векторное поле ровно с одной особой точкой а) на сфере; б) на сфере с двумя ручками.

Задача 7.5. Непрерывное отображение сферы в себя имеет либо неподвижную, либо переходящую в диаметрально противоположную точку.

Задача 7.6. Для векторного поля на поверхности с краем, которое на краю направлено внутрь поверхности, сумма индексов особых точек равна эйлеровой характеристике.