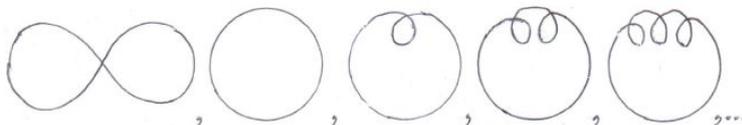


## Теорема Уитни

**Задача 8.1.** Как изменится индекс Уитни кривой, если заменить ее ориентацию на противоположную?

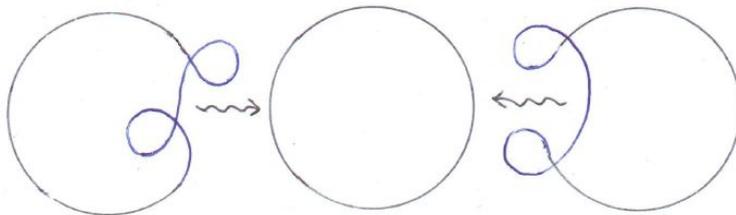
**Задача 8.2.** Найдите индексы Уитни следующих кривых:



**Задача 8.3.** Докажите, что у любой погруженной кривой на плоскости с самопересечениями есть простая петля, такая что лежащий внутри петли угол в точке самопересечения меньше развернутого<sup>1</sup>. УКАЗАНИЕ. Возьмите любую точку на внешней границе кривой и ведите от нее путь в одну сторону, пока он не самопересечется.

**Задача 8.4.** Пусть  $\gamma$  — погруженная кривая, а  $\omega \subset \gamma$  — простая петля как в задаче 3. Постройте регулярную гомотопию, тождественную вне  $\omega$  и переводящую  $\omega$  в новую простую петлю, не пересекающую  $\gamma \setminus \omega$  и имеющую малый диаметр.

**Задача 8.5.** Постройте две регулярные гомотопии:



**Задача 8.6.** Докажите, что любая погруженная кривая регулярно гомотопна либо окружности с несколькими петлями снаружи, либо окружности с несколькими петлями внутри.

**Задача 8.7 (Теорема Уитни).** Любая погруженная кривая на плоскости регулярно гомотопна одной из кривых из задачи 2.

**Задача 8.8 (Теорема Уитни для сферы).** Любая погруженная кривая на сфере регулярно гомотопна окружности или восьмерке.

**Задача 8.9.** Существует ли регулярная гомотопия окружности, переводящая окружность в себя, но меняющая местами ее внешнюю и внутреннюю стороны?

Двумерную сферу можно вывернуть наизнанку, если разрешить самопересечения, но запретить изломы. См. [en.wikipedia.org/wiki/Sphere\\_eversion](http://en.wikipedia.org/wiki/Sphere_eversion)

<sup>1</sup>Например, не подходит внешняя петля на третьем рисунке к задаче 2. Напомним, что для погруженной кривой касательные вектора в точке самопересечения неколлинеарны, поэтому в точности развернутый угол получиться не может