

## Фундаментальная группа

**Задача 9.0.** а) Пусть  $f, g: X \rightarrow Y$  — гомотопные отображения,  $f, g: x \mapsto y$ . Можно ли утверждать, что отображения  $f_*, g_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y)$  равны?

б) Гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные фундаментальные группы.

**Задача 9.1.**  $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$  для конечных клеточных комплексов  $X$  и  $Y$ .

**Задача 9.2.** Вычислите фундаментальную группу а) ленты Мёбиуса; б)  $\mathbb{R}P^2$ ; в) дополнения до трех координатных осей в  $\mathbb{R}^3$ .

**Задача 9.3.** Дополнение до двух незацепленных окружностей в  $\mathbb{R}^3$  и дополнение для двух стандартных зацепленных окружностей в  $\mathbb{R}^3$  гомотопически не эквивалентны.

**Задача 9.4.** а) Вычислите фундаментальную группу сферы с  $g$  ручками.

б) Докажите, что фактор этой группы по коммутанту — это  $\mathbb{Z}^{2g}$ .

Следствие: для разных  $g$  сферы с  $g$  ручками не гомеоморфны и даже не гомотопически эквивалентны.

**Задача 9.5.** а) Фундаментальная группа бутылки Клейна есть группа с двумя образующими и одним соотношением:  $c_1^2 c_2^2 = 1$ .

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для остальных неориентируемых поверхностей.

**Задача 9.7.** Как изменяется фундаментальная группа  $CW$ -комплекса при приклеивании клетки размерности а) 2; б)  $n > 2$ ?

**Задача 9.8.** Вычислите фундаментальную группу а)  $\mathbb{R}P^n$ ; б)  $\mathbb{C}P^n$ .

**Задача 9.9.** Всякая группа является фундаментальной группой некоторого двумерного  $CW$ -комплекса.

**Задача 9.10.** Лента Мёбиуса не ретрагируется на свою границу.