Топология-3, семинар 10, 14.04.2016.

Задача 1. Пусть $F_n = F_{n,1,2,\ldots,n}$ — многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^n$. Докажите, что $H^*(F_n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1,\ldots,t_n]/(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, где $\deg t_i = 2$, а σ_j — j-ый элементарный симметрический многочлен от t_i (положите $t_i = c_1(\xi_i)$, где ξ_i — i-ое каноническое расслоение над флагом и воспользуйтесь рецептом, приведенным на лекции для грассманиана).

Задача 2.* Опишите кольцо когомологий произвольного многообразия флагов $F_{m,j_1,\ldots,j_n}$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant m$.

Задача 3. Если η нечетномерно, то $2e(\eta) = 0$.

Задача 4. (а) $e(\eta_1 \oplus \eta_2) = e(\eta_1) \smile e(\eta_2)$. (б) Пусть $2e(\eta) \neq 0$. Тогда η не может быть представлено в виде прямой суммы двух векторных расслоений, одно из которых нечетномерно.

Задача 5. Докажите, что $\mathbb{Z}_2$-аналог класса Эйлера (определенный также и для неориентируемых расслоений) совпадает с $w_m(\eta)$ — старшим классом Штифеля–Уитни (m — ранг расслоения η).

Задача 6. Пусть η — комплексное расслоение размерности n, и $\eta_{\mathbb{R}}$ — его овеществление. Тогда $c_n(\eta) = e(\eta_{\mathbb{R}})$. (Указание: рассмотреть классифицирующие расслоения над $BU(n)$, BT^n, BT^1).

Задача 7. Точная последовательность Гизина. Пусть $\xi\colon E \to B$ — ориентируемое n-мерное векторное расслоение. Докажите существование точной последовательности

$$\cdots \to H^i(B) \xrightarrow{\smile e(B)} H^{i+n}(B) \to H^{i+n}(E, E\backslash B) \to H^{i+1}(B) \to \cdots,$$

используя точную последовательность когомологий пары $(E, E\backslash B)$ и изоморфизм Тома.

Задача 8. При каких n на сфере S^n существует нигде не нулевое векторное поле?

Задача 9.* Пусть K — триангуляция гладкого замкнутого многообразия M, $\dim M = n$. Пусть $r_i \in \mathcal{C}_i(K';\mathbb{Z}_2)$ — сумма всех i-мерных симплексов барицентрического подразбиения триангуляции K (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$). Докажите, что r_i является циклом и что соответствующий гомологический класс $[r_i] \in H_i(K;\mathbb{Z}_2)$ Пуанкаре двойственнен к классу Штифеля–Уитни $w_{n-i}(M)$.