Топология-3, семинар 11, 28.04.2016.

Задача 1. Элемент $p(\eta_1 \oplus \eta_2)$ сравним с $p(\eta_1)p(\eta_2)$ по модулю элементов порядка 2. Иными словами, $2(p(\eta_1 \oplus \eta_2) - p(\eta_1)p(\eta_2)) = 0$.

Задача 2. Пусть ξ — комплексное расслоение. Тогда $(\xi_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \xi \oplus \bar{\xi}$. Вывести отсюда, что для комплексных расслоений выполнено

$$1 - p_1 + p_2 - p_3 + \cdots = (1 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots)(1 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots)$$

Задача 3. (а) Пусть η — ориентированное n-мерное вещественное расслоение. Тогда $(\eta_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \eta \oplus \eta$ при изоморфизме, который либо сохраняет, либо меняет ориентацию в зависимости от четности числа $n(n-1)/2$. (б) Для всякого $2k$-мерного ориентированного вещественного расслоения η выполнено $p_k(\eta) = e(\eta)^2$.

Задача 4. Опишите классы Понтрягина многообразия $\mathbb{C}P^n$.

Задача 5. Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$. Тогда любое характеристическое число многообразия M равно сумме соответствующих характеристических чисел многообразий M_1 и M_2.

Задача 6. Любое число Понтрягина p_ω удовлетворяет формуле $p_\omega(-M) = -p_\omega(M)$, где $-M$ — многообразие M с противоположной ориентацией.

Задача 7. Связной суммой $M \# N$ многообразий M и N одной размерности называется многообразие, получаемое вырезанием маленьких дисков из M и N и склеиванием по полученной границе. Докажите, что $M \# N$ бордантно $M \sqcup N$.

Задача 8. Является ли эйлерова характеристика родом Хирцебруха? Если да, то какой ряд ее задает?