Топология-3, семинар 12, 05.05.2016.

Задача 1. Пусть M^{4n} — ориентируемое многообразие, а $t_1, \dots, t_s$ — корни Понтрягина его касательного расслоения. Пусть $s_n(M^{4n}) = \sum_i t_i^n \in H^{4n}(M)$. Докажите, что если M представимо как произведение двух ориентируемых многообразий положительных размерностей, то $s_n(M) = 0$.

Задача 2. Если M^{4n} — граница ориентируемого многообразия B (возможно, несвязная), то сумма сигнатур ее компонент связности равна 0.

Задача 3. (а) Вычислить сигнатуру многообразий T^4 и $k\mathbb{C}P^2 \# l\overline{\mathbb{C}P}^2$ (связная сумма k копий $\mathbb{C}P^2$ и l копий $\mathbb{C}P^2$ с обращенной ориентацией), и описать их первый класс Понтрягина. (б) При каких значениях k и l многообразие $k\mathbb{C}P^2 \# l\overline{\mathbb{C}P}^2$ является границей ориентируемого пятимерного многообразия?

Задача 4.* Ввести (какую-нибудь) стабильно комплексную структуру на $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$.

Задача 5. $\hat{A}$-род задается рядом $\dfrac{\sqrt{t}/2}{\sinh(\sqrt{t}/2)}$. Вычислить $\hat{A}$-род многообразия $\mathbb{C}P^{2n}$.

Задача 6. Пусть род Хирцебруха $\phi_Q\colon \Omega_*^{\mathrm{SO}} \to R$ задается рядом $Q \in R[[t]]$, начинающимся с 1. Рассмотрим нечетный формальный ряд $f(t) = t/Q(t^2)$ (начинающийся с $t + \dots$). Пусть $g(y) \in R[[y]]$ — функционально обратный к f, то есть $f(g(t)) = t$. Ряд g называется логарифмом рода ϕ_Q. Таким образом, формальная производная $g'(y)$ является четным рядом, начинающимся с 1. Докажите, что $g'(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_Q(\mathbb{C}P^n) y^n$.

Задача 7.* Пусть $R = \Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q}$ и $\phi\colon \Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q} \to R$ — тождественный гомоморфизм. ϕ называется универсальным родом Хирцебруха. Пусть $Q(t) \in R[[t]]$ — ряд, который задает универсальный род. Вычислите первые три ненулевых члена этого ряда.

Задача 8.* Для комплексного расслоения ξ с базой B и корнями Черна $t_1, \dots, t_n$ рассмотрим размерностно-неоднородный элемент $\mathrm{ch}(\xi) := e^{t_1} + \dots + e^{t_n} \in H^{2*}(B; \mathbb{Q})$ (элемент корректно определен, поскольку выражение симметрично по t_i). Этот элемент называется характером Черна расслоения ξ. Докажите, что характер Черна задает мультипликативный гомоморфизм из K-теории $K(B)$ в $H^{2*}(B; \mathbb{Q})$. Иными словами, $\mathrm{ch}(\xi \oplus \eta) = \mathrm{ch}(\xi) + \mathrm{ch}(\eta)$ и $\mathrm{ch}(\xi \otimes \eta) = \mathrm{ch}(\xi) \cdot \mathrm{ch}(\eta)$.