# Топология-3, семинар 2, 18.02.2016.

**Задача 1.** Доказать, что $S^n, T^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ являются замкнутыми многообразиями.

**Задача 2.** Доказать, что $S^n, T^n, \mathbb{C}P^n$ ориентируемы.

**Задача 3.** При каких $n$ многообразие $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо?

Пусть $X$ — замкнутое многообразие размерности $n$. Рассмотрим множество $\widetilde{X} = \{\alpha_x \mid x \in X\}$, где $\alpha_x \in H_n(X, X \backslash x; \mathbb{Z})$ — локальная ориентация в точке $x$. Введем на $\widetilde{X}$ топологию, базу которой образуют множества $\widetilde{B} = \{\alpha_x \mid x \in B\}$, где $B$ — открытое подмножество в $X$, а $\alpha_x$ — набор согласованных на $B$ локальных ориентаций.

**Задача 4.** (1) Докажите, что $\widetilde{X}$ — ориентируемое многообразие. (2) Отображение $\widetilde{X} \to X$, $\alpha_x \mapsto x$ является двулистным накрытием. (3) Пусть $X$ связно. Тогда $X$ ориентируемо в том и только том случае, когда $\widetilde{X}$ имеет две компоненты связности. (4) Если в $\pi_1(X)$ нет элементов порядка 2, то $X$ ориентируемо. В частности, любое односвязное многообразие ориентируемо.

Многообразие $\widetilde{X}$ называется **ориентирующим накрытием** многообразия $X$.

**Задача 5.** Описать ориентирующие накрытия бутылки Клейна и $\mathbb{R}P^n$ при $n \geqslant 1$.

**Задача 6.** Если $X$ — некомпактное связное многообразие размерности $n$, то $H_j(X) = 0$ при всех $j \geqslant n$.

**Задача 7.** Для любого $\alpha \in C_{k+l}(X; R)$, $\phi \in C^k(X; R)$ и $\psi \in C^l(X; R)$ имеем

$$\psi(\alpha \frown \phi) = (\psi \smile \phi)(\alpha).$$

**Задача 8.** Пусть $\epsilon\colon H_0(X; R) \to R$ — гомоморфизм аугментации. Тогда $\epsilon(\alpha \frown \phi) = \phi(\alpha)$ для любых $\alpha \in C_k(X; R)$ и $\phi \in C^k(X; R)$.

**Задача 9.** Пусть $K$ — триангуляция топологического (или гомологического) многообразия, $\dim K = n$, и пусть $J$ — симплекс размерности $k$. Для каждого максимального симплекса $I$, содержащего $J$, рассмотрим его грань, противоположную $J$ (т.е. грань, вершины которой не содержатся в $J$). Обозначим эту грань символом $I \backslash J$. Объединение симплексов $I \backslash J$ по всем $I$, содержащим $J$, называется линком симплекса $J$. Докажите, что (1) Линк является размерностно однородным пространством размерности $n - \dim J - 1$.

(2) Линк имеет гомологии как у сферы размерности $n - \dim J - 1$.

(3) Линк симплекса размерности $n - 2$ гомеоморфен окружности.

(4) Линк является гомологическим многообразием.

**Задача 10.** Выведите из предыдущей задачи, что связное триангулированное гомологическое многообразие сильно связно[1] .

[1] Последние две задачи этого листка опередили содержание лекции и их будет проще решить после следующей лекции.