Топология-3, семинар 4, 03.03.2016.

Задача 1. Вывести двойственность Пуанкаре, двойственность Пуанкаре–Лефшеца и двойственность Александера из двойственности Пуанкаре–Александера–Лефшеца.

Задача 2. Задать гладкую структуру на многообразиях $S^n, T^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$.

Задача 3. Пусть X, Y — гладкие многообразия. Задать гладкую структуру на произведении $X \times Y$.

Задача 4.* Часовщик смастерил часы с неразличимыми минутной и часовой стрелкой. Сколько раз в день по таким часам нельзя точно определить время? Ход стрелок непрерывный, циферблат 12-часовой. Принимается, конечно, любое верное решение, но решение с применением когомологий особенно порадует принимающих.

Задача 5. Докажите, что множество всех n-мерных векторных подпространств в m-мерном векторном пространстве V (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) является замкнутым многообразием[1]. Оно называется многообразием Грассмана или грассманианом и обозначается $G_n(V)$ (или $G_{m,n}$, $G_{m,n}(\mathbb{C})$).

Задача 6. Доказать, что множество ортонормированных k-реперов в векторном пространстве V является замкнутым многообразием. Оно называется многообразием Штифеля и обозначается $V_{m,n}$ (или $V_{m,n}(\mathbb{C})$ в комплексном случае).

Задача 7. Пусть $0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_k < m$ и $V \cong \mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$. Набор подпространств $W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_k \subset V$, $\dim W_s = j_s$ называется флагом в V, соответствующим последовательности $(j_1, \ldots, j_k)$. Докажите, что множество флагов, соответствующих заданной последовательности $(j_1, \ldots, j_k)$, является замкнутым многообразием. Оно называется многообразием флагов и будет обозначаться $F_{m;j_1,\ldots,j_k}$.

Задача 8.* Сколько существует аффинных прямых в $\mathbb{C}^3$, которые пересекают каждую из четырех данных прямых, находящихся в общем положении? Докажите, что это число совпадает с $|\int_{G_{2,4}(\mathbb{C})} \omega_A^4|$, где $G_{2,4}(\mathbb{C})$ — грассманиан 2-мерных плоскостей в 4-мерном комплексном пространстве, $A \subset G_{2,4}(\mathbb{C})$ — 3-мерное подмногообразие плоскостей, пересекающих заданную плоскость, а $\omega_A \in H^1(G_{2,4}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ — двойственный к $[A]$ когомологический класс.

[1] Отдельный бонус тем, кто введет гладкую структуру в задачах 5,6,7