Топология-3, семинар 5, 10.03.2016.

Задача 1. Доказать, что классифицирующее пространство BG определено однозначно с точностью до гомотопии.

Задача 2. Для дискретной группы G доказать, что классифицирующее пространство BG совпадает с пространством Эйленберга–Маклейна $K(G,1)$ (с точностью до гомотопии).

Задача 3. (а) Доказать, что $BT^n \simeq K(\mathbb{Z}^n, 2)$. (б) Доказать, что множество главных T^n-расслоений над CW-комплексом B биективно множеству $H^2(B;\mathbb{Z})$, причем тривиальному расслоению соответствует $0 \in H^2(B;\mathbb{Z})$.

Задача 4. Опишите все главные $\mathbb{Z}/2$-расслоения над $\mathbb{R}P^n$.

Задача 5. Опишите классифицирующее пространство свободной группы на n образующих.

Задача 6. Пусть G — дискретная группа, а BG — ее классифицирующее пространство. Докажите, что когомологии $H^*(BG;R)$ можно вычислить следующим образом. Пусть $C^n(G;R)$ — модуль всех функций из G^n в R. Зададим гомоморфизм $d^n\colon C^n(G;R) \to C^{n+1}(G;R)$ формулой

$$d^n\phi(g_1,\ldots,g_{n+1}) =$$
$$= \phi(g_2,\ldots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\phi(g_1,\ldots,g_{i-1},g_i\cdot g_{i+1},g_{i+2},\ldots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1}\phi(g_1,\ldots,g_n).$$

Проверьте, что $d^{n+1}\circ d^n = 0$ и $\ker d^n/\operatorname{Im} d_{n-1} \cong H^n(BG;R)$ (Указание: покажите, что на конструкции Мильграма–Стинрода имеется естественная структура клеточного комплекса, и дифференциальный комплекс ее клеточных коцепей совпадает с $C^*(G;R)$).

Пусть Σ_n — группа перестановок n элементов. Для произвольного топологического пространства X определим $F_nX = \{(x_1,\ldots,x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\}$. Группа Σ_n естественным образом действует на F_nX, переставляя точки из набора. Пусть $C_nX = F_nX/\Sigma_n$ — пространство n-элементных подмножеств пространства X. Пространства F_nX, C_nX называются конфигурационными пространствами (соотв. упорядоченных и неупорядоченных наборов точек).

Задача 7. Докажите, что $B\Sigma_n = C_n\mathbb{R}^\infty$.