

Топология-3, семинар 6, 17.03.2016.

Задача 1. Если на расслоении η есть скалярное произведение, то $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\eta, \mathbb{R}) \cong \eta$.

Задача 2. Если на комплексном расслоении η есть эрмитово произведение, то $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\eta, \mathbb{C}) \cong \bar{\eta}$.

Задача 3. Докажите, что операция тензорного произведения задает на множестве (классов изоморфизма) одномерных вещественных расслоений над B структуру группы. Если на η есть скалярное произведение, то η является элементом порядка 2 или единицей в этой группе.

Задача 4. Докажите, что группа из предыдущей задачи изоморфна $H^1(B; \mathbb{Z}_2)$.

Рассмотрим множество $VB(X)$ всех вещественных (соотв. комплексных) расслоений над заданным X . Операции прямой суммы и тензорного произведения задают на этом множестве структуру полукольца. Соответствующее кольцо Гротендика (т.е. множество формальных разностей $\eta - \xi$, $\eta, \xi \in VB(X)$) называется K -теорией пространства X и обозначается $KO(X)$ (в комплексном случае $K(X)$).

Задача 5. Доказать, что $K(\text{pt}) = KO(\text{pt}) = \mathbb{Z}$. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизм $f^*: K(Y) \rightarrow K(X)$. Гомотопные отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы.

Задача 6.* Докажите, что для любого вещественного расслоения η над компактной базой B найдется такое векторное расслоение ξ над B , что $\eta \oplus \xi$ — тривиальное расслоение. Докажите, что требование компактности базы убрать нельзя.

Задача 7. Пусть X — компактный CW-комплекс, а $C(X)$ — алгебра непрерывных вещественнозначных функций на X . Пусть η — вещественное векторное расслоение над X . Докажите, что множество сечений $\Gamma(\eta)$ расслоения η обладает структурой модуля над $C(X)$. (а) Докажите, что модуль $\Gamma(\eta)$ свободен в том и только том случае, когда η тривиально. (б) Модуль прямой суммы расслоений равен прямой сумме модулей. (в) Докажите, что для произвольного расслоения η модуль $\Gamma(\eta)$ является проективным (то есть прямым слагаемым в свободном модуле).