Топология-3, семинар 8, 31.03.2016.

Задача 1. Вычислить классы Черна комплексного многообразия $\mathbb{C}P^n$.

Задача 2. Доказать теорему Люка: пусть p — простое число, $a, b > 0$, $\overline{\ldots a_2 a_1 a_0}$ — p-ичная запись a, $\overline{\ldots b_2 b_1 b_0}$ — p-ичная запись b. Тогда $\binom{a}{b} \equiv \prod_i \binom{a_i}{b_i} \mod p$.

Задача 3. При каких k $\mathbb{R}P^k$ параллелизуемо? При каких k $w_k(\mathbb{R}P^k) \neq 0$?

Задача 4. Если $n + 1 = 2^r m$, где m нечетно, то на $\mathbb{R}P^n$ не существует 2^r линейно независимых полей.

Задача 5. Доказать, что T^n можно вложить в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Задача 6. Если M^n может быть погружено в $\mathbb{R}^{n+1}$, то каждый класс $w_i(M)$ является степенью класса $w_1(M)$. Докажите, что $\mathbb{R}P^n$ можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$ в том и только том случае, когда $n = 2^k - 1$ или $n = 2^k - 2$.

Задача 7. Найти классы Штифеля–Уитни бутылки Клейна и сферы с g ручками.

Задача 8. Пусть $i\colon N^n \to \mathbb{R}^m$ — погружение. Рассмотрим отображение $f\colon N \to G_{m,n}$, $f(x) = D_x i(T_x N)$. Докажите, что f является классифицирующим для касательного расслоения TN.

Задача 9.* (а) Пусть $U(n) \hookrightarrow O(2n)$ естественное вложение групп. Описать индуцированный гомоморфизм $H^*(BO(2n); \mathbb{Z}_2) \to H^*(BU(n); \mathbb{Z}_2)$.

(б) Вычислить классы Штифеля–Уитни многообразия $\mathbb{C}P^n$.