Топология-3, семинар 9, 07.04.2016.

Задача 1.* Пусть $t_1, \dots, t_n$ — корни Черна расслоения ξ, а $t'_1, \dots, t'_k$ — корни Черна расслоения η над той же базой. Докажите, что набор $\{t_i + t_j\}_{\substack{i\in[n]\\ j\in[k]}}$ является набором корней Черна расслоения $\xi \otimes \eta$. Указание:

1. Если $f\colon B \to BU(n)$, $g\colon B \to BU(k)$ классифицируют ξ и η соответственно, то $\xi\otimes\eta$ классифицируется композицией $B \xrightarrow{\Delta} B \times B \xrightarrow{f\times g} BU(n) \times BU(k) \to BU(nk)$, где последнее отображение индуцировано гомоморфизмом групп $s\colon U(n) \times U(k) \to U(nk)$, отправляющим матрицы $A \in U(n)$, $C \in U(k)$ в их кронекерово (тензорное) произведение.

2. Рассмотреть отображение $r\colon T^n \times T^k \to T^{n+k}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k) \mapsto (\lambda_i\lambda'_j)$ и коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} T^n \times T^k \arrow[r, "r"] \arrow[d, hook] & T^{nk} \arrow[d, hook] \\ U(n) \times U(k) \arrow[r, "s"] & U(nk) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} BT^n \times BT^k \arrow[r, "Br"] \arrow[d] & BT^{nk} \arrow[d] \\ BU(n) \times BU(k) \arrow[r, "Bs"] & BU(nk) \end{tikzcd}$$

3. Описать индуцированный гомоморфизм когомологий

$$Br^*\colon H^*(BT^{nk}) \to H^*(BT^n \times BT^k).$$

Задача 2.* Пользуясь рецептами, приведенными для прямой суммы и тензорного произведения, опишите корни Черна $\Lambda^k\xi$ — k-й внешней степени расслоения ξ в терминах корней Черна расслоения ξ.

Задача 3.* Аналогичный вопрос для k-й симметрической степени.

Опечатки и комментарии к предыдущим задачам:

Л.1.З.3. В первой версии листка не было сказано, что X,Y — CW-комплексы и под суммой стояло $n-1$. Должно быть $i + j = n + 1$.

Л.2.З.7. ϕ и ψ перепутаны. З.9 “Размерностно однородный” означает, что все максимальные по включению симплексы имеют одинаковую размерность.

Л.5.З.7. Можно считать, что рассматриваемые конфигурационные пространства являются CW-комплексами.

Л.6.З.2. Если ξ — комплексное расслоение, то $\bar{\xi}$ обозначает сопряженное расслоение, то есть расслоение ξ, в котором умножение на $\sqrt{-1}$ заменили умножением на $-\sqrt{-1}$.

Л.7.З.1. Во второй диаграмме равенство над нижней стрелкой лишнее.