Топология-3

Антон Айзенберг
ayzenberga@gmail.com

6 мая 2016 г.

Содержание

1 Напоминание и повторение

Пусть X, Y — топологические пространства, а R — кольцо коэффициентов.

Теорема 1.1 (Формула Кюннета для гомологий)**.** *Пусть X, Y — клеточные комплексы, а R — область главных идеалов (например, $\mathbb{Z}$ или поле). Тогда существует естественная расщепимая точная последовательность*

$$0 \to \bigoplus_i (H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y)) \to H_n(X \times Y) \to \bigoplus_i \mathrm{Tor}^R(H_i(X), H_{n-i-1}(Y)) \to 0.$$

Теорема 1.2 (Формула Кюннета для когомологий)**.** *Пусть X, Y — клеточные комплексы, а R — область главных идеалов (например, $\mathbb{Z}$ или поле). Тогда существует естественная расщепимая точная последовательность*

$$0 \to \bigoplus_i (H^i(X) \otimes H^{n-i}(Y)) \to H^n(X \times Y) \to \bigoplus_i \mathrm{Tor}^R(H^i(X), H^{n-i+1}(Y)) \to 0.$$

Оба утверждения следуют из алгебраической формулы Кюннета и изоморфизма клеточных цепных комплексов: $\mathcal{C}_\bullet(X \times Y) \cong \mathcal{C}_\bullet(X) \otimes \mathcal{C}_\bullet(Y)$ (в случае когомологий, имеем аналогичный изоморфизм коцепных комплексов $\mathcal{C}^\bullet(X \times Y) \cong \mathcal{C}^\bullet(X) \otimes \mathcal{C}^\bullet(Y)$).

Следствие 1.3. *Если гомологии (соотв. когомологии) одного из пространств X, Y являются свободными модулями над R, то гомоморфизм $\bigoplus_i (H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y)) \to H_n(X \times Y)$ (соотв. $\bigoplus_i (H^i(X) \otimes H^{n-i}(Y)) \to H^n(X \times Y)$) является изоморфизмом. В частности, это верно, когда R — поле.*

Любое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм гомологий $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ и гомоморфизм когомологий, действующий в обратном направлении $f^*\colon H^n(Y) \to H^n(X)$ для любого n. Если $f, g\colon X \to Y$ — два гомотопных отображения, то $f_* = g_*$ и $f^* = g^*$. Поэтому говорят, что гомологии являются ковариантным гомотопическим функтором, а когомологии являются контравариантным гомотопическим функтором.

Диагональ $\Delta\colon X \to X \times X, \Delta(x) = (x, x)$ индуцирует гомомрфизм $\Delta^*\colon H^*(X \times X) \to H^*(X)$. Взяв композицию с гомоморфизмом $\bigoplus_i (H^i(X) \otimes H^{n-i}(X)) \to H^n(X \times X)$ из формулы Кюннета для когомологий, получим естественный гомоморфизм:

$$\bigoplus_i (H^i(X) \otimes H^{n-i}(X)) \to H^n(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^n(X).$$

Этот гомоморфизм задает на R-модуле когомологий $H^*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X)$ умножение, превращая его в градуированную R-алгебру. Используя коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & X \times X \arrow[d, "\Delta \times \mathrm{id}_X"] \\ X \times X \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times \Delta"] & X \times X \times X \end{tikzcd}$$

и естественность отображения Кюннета, несложно показать, что введенная операция умножения ассоциативна. Естественное отображение $p\colon X \to \mathrm{pt}$ индуцирует отображение $p^*\colon R = H^0(\mathrm{pt}) \to H^0(X)$, которое определяет единицу $1_{H^*(X)} = p^*(1_R) \in H^0(X)$, т.е. такой элемент, что $1_{H^*(X)} \cdot a = a$ для любого $a \in H^*(X)$.

Замечание 1.4. Существует неформальная причина, почему мы не можем проделать то же самое с гомологиями. В гомологиях диагональ индуцирует отображение $\Delta_*\colon H_n(X) \to H_n(X \times X)$, а отображение из формулы Кюннета имеет вид $\bigoplus_i (H_i(X) \otimes H_{n-i}(X)) \to H_n(X \times X)$, так что состыковать их никак не получается.

Если предположить, что модуль $H_*(X)$ свободен, то отображение Кюннета можно обратить. Тогда, взяв композицию с Δ_* мы получим гомоморфизм $H_*(X) \to H_*(X) \otimes H_*(X)$. Такой гомоморфизм называется коумножением, и его наличие превращает $H_*(X)$ в коалгебру. Многие свойства алгебр можно перенести на коалгебры, однако с алгебрами работать все-таки проще и привычнее.

Операцию умножения можно определить по-другому, начиная с сингулярных коцепей. Определим $\smile$-произведение сингулярных коцепей $a \in C^p(X)$, $b \in C^q(X)$ как коцепь $a \smile b$ значение которой на сингулярном симплексе $\sigma\colon \Delta^{p+q} = [v_0, \ldots, v_{p+q}] \to X$ задается формулой

$$(a \smile b)(\sigma) = a(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_p]}) \cdot b(\sigma|_{[v_p,\ldots,v_{p+q}]}).$$

Коциклы образуют подалгебру в алгебре $(C^*(X), \smile)$, а кограницы — идеал в этой подалгебре, значит $\smile$-умножение корректно определено на сингулярных когомологиях. Известно, что $a \smile b = (-1)^{pq} b \smile a$ для любых $a \in H^p(X)$, $b \in H^q(X)$ (это свойство называется градуированной коммутативностью). Наконец, $\smile$-умножение в $H^*(X)$ совпадает с умножением, введенным ранее при помощи гомоморфизма Кюннета.

Вывод 1.5. *$H^*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X; R)$ является градуированной градуированно-коммутативной ассоциативной алгеброй над R с единицей. Отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм алгебр $f^*\colon H^*(Y) \to H^*(X)$.*

Пример 1.6. $H^*(T^n) \cong \Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, $\deg \alpha_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

$H^*(S^n) \cong R[u]/(u^2)$, $\deg u = n$.

$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1})$, $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[u]$, $\deg u = 1$.

$H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u]/(u^{n+1})$, $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u]$, $\deg u = 2$.

$H^*(M_g; \mathbb{Z})$ порождено одномерными классами $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, и соотношениями $a_i a_j = b_i b_j = 0$ при всех i, j, $a_i b_j = 0$ при $i \neq j$ и $a_1 b_1 = a_2 b_2 = \ldots = a_g b_g$.

Замечание 1.7. Умножение в когомологиях является дополнительной структурой, а когомологии, рассматриваемые как градуированная алгебра, являются более сильным инвариантом, чем когомологии рассматриваемые лишь как градуированный R-модуль. Например, когомологии пространств T^2 и $S^2 \vee S^1 \vee S^1$ изоморфны как R-модули, но не изоморфны как алгебры (упражнение).

Замечание 1.8. Пространство (клеточный комплекс) X связно в том и только том случае, когда $H^0(X) \cong R$. Назовем градуированную алгебру $A^* = \bigoplus_{j \geqslant 0} A^j$ над кольцом R связной, если $A^0 \cong R$. Получаем, что пространство связно тогда и только тогда, когда его алгебра когомологий связна.

Упражнение 1.9. Докажите, что существует естественная гомотопическая эквивалентность $\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee X * Y$. Если R — поле, то $\widetilde{H}_n(X * Y; R) \cong \bigoplus_{i+j=n-1} \widetilde{H}_i(X; R) \otimes \widetilde{H}_j(Y; R)$.

Упражнение 1.10. Описать кольцо когомологий поверхности M_g (сферы с g ручками). Указание: построить отображение из M_g в букет g копий двумерного тора.

Упражнение 1.11. Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Тогда гомоморфизм Гуревича $h\colon \pi_1(X) \to H_1(X; \mathbb{Z})$ сюръективен, и его ядро совпадает с коммутантом группы $\pi_1(X)$. Иными словами, группа $H_1(X; \mathbb{Z})$ есть абелианизация группы $\pi_1(X)$.

Упражнение 1.12. Пусть X, Y — связные CW-комплексы с отмеченными точками. Докажите, что $H^i(X \vee Y) \cong H^i(X) \oplus H^i(Y)$ при $i \geqslant 1$, а произведение когомологических классов $\phi \in H^i(X) \subset H^i(X \vee Y)$ и $\psi \in H^j(Y) \subset H^j(X \vee Y)$ равно нулю при $i, j \geqslant 1$.

2 Многообразия

В целях мотивации приведем результат, к которому (в числе прочих) мы будем стремиться.

Связная градуированная алгебра (ассоциативная, градуированно-коммутативная с единицей) $A^* = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A^j$ над полем R называется алгеброй Пуанкаре формальной размерности n, если $A^j = 0$ при $j > n$, $A^n \cong R$ и билинейное спаривание $\times\colon A^j \otimes A^{n-j} \to A^n \cong R$ является невырожденным.

Утверждение 2.1. *Пусть X — замкнутое связное ориентируемое многообразие, $\dim X = n$, а R — поле. Тогда $H^*(X)$ является алгеброй Пуанкаре формальной размерности n.*

Это утверждение дает сильное ограничение на возможный вид когомологий многообразий.

2.1 Топологические многообразия

Определения

Определение 2.2. Хаусдорфово паракомпактное[1] пространство X называется топологическим многообразием (соотв. многообразием с краем) размерности n, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность гомеоморфная открытому подмножеству $V \subset \mathbb{R}^n$ (соотв. открытому подмножеству $V \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$).

Определение 2.3. Пусть X — многообразие с краем. Множество точек $x \in X$, для которых не существует окрестности, гомеоморфной открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$, называется краем и обозначается ∂X.

Замкнутым многообразием называется компактное многообразие без края.

Примеры многообразий у нас уже встречались: $S^n, T^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$. Примеры многообразий с краем: D^n, полноторие (их края — S^2 и T^2 соответственно). Примеры не многообразий: графы с вершинами степени больше 2, бесконечномерные клеточные комплексы (такие как $\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{C}P^\infty$), книга с тремя страницами. Все дальнейшие определения будут формулироваться для многообразий без края, хотя их можно без труда распространить на многообразия с краем.

Пусть U — окрестность точки $x \in X$ и $\varphi\colon U \to V$ — гомеоморфизм на подмножество $\mathbb{R}^n$, существующий по определению. Подмножество U (вместе с фиксированным гомеоморфизмом φ) называется картой на многообразии X. Множество карт U_α, $\alpha \in A$, покрывающее все многообразие X, называется атласом на X.

Предложение 2.4. *Пусть X — топологическое многообразие размерности n и $x \in X$. Тогда $H_j(X, X\backslash x; R) = 0$ при $j \neq n$ и $H_n(X, X\backslash x; R) \cong R$.*

Доказательство. По определению топологического многообразия, у точки $x \in X$ существует окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству $\mathbb{R}^d$. Выберем в этой окрестности маленький открытый шарик B, содержащий x и пусть $Z = X\backslash B$. Тогда, по свойству вырезания, $H_j(X, X\backslash x; R) \cong H_j(X\backslash Z, (X\backslash x)\backslash Z; R) = H_j(B, B\backslash x; R)$. Поскольку шарик B стягиваем, из точной последовательности пары

$$\cdots \to \widetilde{H}_j(B; R) \to H_j(B, B\backslash x; R) \to \widetilde{H}_{j-1}(B\backslash x; R) \to \widetilde{H}_{j-1}(B; R) \to \cdots$$

заключаем, что $H_j(B, B\backslash x; R) \cong \widetilde{H}_{j-1}(B\backslash x; R)$. Пространство $B\backslash x$ гомотопически эквивалентно $(n-1)$-мерной сфере, а значит его приведенные гомологии тривиальны в размерностях $j \neq n-1$ и изоморфны R в размерности $n-1$. Значит $H_j(X, X\backslash x; R) = 0$, при $j \neq n$, и $H_n(X, X\backslash x; R) = R$. □

[1] Паракомпактность: в любое открытое покрытие можно вписать локально конечное подпокрытие. Локально конечное покрытие: для любой точки существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия

Замечание 2.5. Приведенное рассуждение должно убедить в справедливости следующего факта: группы $H_*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ описывают свойства пространства X в сколь угодно малой окрестности точки x (т.е. локальные свойства). Поэтому часто группу $H_*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ называют группой локальных гомологий (а $H^*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ — локальными когомологиями).

Определение 2.6. Паракомпактное хаусдорфово пространство X называется гомологическим многообразием (над группой R) размерности n, если $H_j(X, X\backslash x; R) = 0$ при $j \neq n$ и $H_n(X, X\backslash x; R) \cong R$ для любой точки $x \in X$.

Таким образом, гомологические многообразия — более широкий класс пространств, нежели топологические многообразия.

Упражнение 2.7. Доказать, что $S^n, T^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ — топологические многообразия. Доказать, что D^n, полноторие — многообразия с краем, а их края — S^2 и T^2 соответственно.

Упражнение 2.8. Если X, Y — топологические многообразия, то $X \times Y$ — топологическое многообразие. Если хотя бы одно из них имеет край, то $X \times Y$ — также многообразие с краем $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y \cup X \times \partial Y \subset X \times Y$.

Ориентация Хотя многие факты верны и для гомологических многообразий (в предположении, что они триангулируемы), мы для простоты ограничимся топологическими многообразиями.

Определение 2.9. Локальной ориентацией α_x в точке $x \in X$ называется образующая группы локальных гомологий $H_n(X, X\backslash x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Образующую группы $\mathbb{Z}$ можно выбрать двумя способами. Значит, в каждой точке топологического многообразия есть две возможных локальных ориентации. Допустим, что точки $x, y \in X$ близки, то есть лежат в одной карте и их можно накрыть замкнутым евклидовым шаром B. Имеем естественные изоморфизмы

$$H_n(X, X\backslash x; \mathbb{Z}) \xleftarrow{\cong} H_n(X, X\backslash B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_n(X, X\backslash y; \mathbb{Z}),$$

индуцированные вложениями пар $(X, X\backslash B) \to (X, X\backslash x)$ и $(X, X\backslash B) \to (X, X\backslash y)$. Ориентации α_x, α_y в близких точках x, y называются согласованными, если они при этих изоморфизмах переходят друг в друга. Многообразие называется ориентируемым, если существует согласованный выбор ориентаций во всех точках (а сам этот выбор называется ориентацией многообразия).

Предложение 2.10. *Пусть X — замкнутое связное многообразие размерности n. Тогда*

1. *Гомоморфизм $H_n(X; \mathbb{Z}_2) \to H_n(X, X\backslash x; \mathbb{Z}_2)$ является изоморфизмом для всех $x \in X$.*

2. *Если X — ориентируемо, то $H_n(X;\mathbb{Z}) \to H_n(X, X\backslash x;\mathbb{Z})$ является изоморфизмом для всех $x \in X$. Если X — неориентируемо, то $H_n(X;\mathbb{Z}) = 0$.*

3. *$H_i(X;\mathbb{Z}) = 0$ при $i > n$.*

Доказательство. В доказательстве мы полагаем, что группа коэффициентов R есть $\mathbb{Z}$ для ориентированного случая, и $\mathbb{Z}_2$ для произвольного. Удобно доказать более общее утверждение.

Лемма 2.11. *Пусть $A \subset X$ — компактное подмножество. Тогда*

1. *$H_i(X, X\backslash A; R) = 0$ при $i > n$. Класс $\alpha \in H_n(X, X\backslash A; R)$ равен нулю тогда и только тогда, когда его образ в $H_n(X, X\backslash x; R)$ равен нулю при всех $x \in A$.*

2. *Для любого набора согласованных ориентаций α_x, $x \in A$, существует единственный элемент $\alpha \in H_n(X, X\backslash A; R)$, чей образ в $H_n(X, X\backslash x; R)$ есть α_x при всех $x \in A$.*

Доказательство леммы. (1) Вначале докажем, что если Лемма верна для компактных подмножеств A, B и $A \cap B$, то она верна и для $A \cup B$. Запишем точную последовательность Майера–Вьеториса (относительную версию):

$$0 \to H_n(X, X\backslash A \cup B) \xrightarrow{\Phi} H_n(X, X\backslash A) \oplus H_n(X, X\backslash B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X, X\backslash A \cap B)$$

(слева стоит 0, поскольку мы предположили, что $H_{n+1}(X, X\backslash A \cap B) = 0$). При $j > n$ по предположению имеем $H_j(X, X\backslash A \cap B) = H_j(X, X\backslash A) = H_j(X, X\backslash B) = 0$, а значит группа $H_j(X, X\backslash A \cup B)$ оказывается зажата между двумя нулями, т.е. $H_j(X, X\backslash A \cup B)$. Пусть $\alpha \in H_n(X, X\backslash A \cup B)$ — такой элемент, что его образ $\alpha_x \in H_n(X, X\backslash x)$ равен нулю при всех $x \in A \cup B$. Тогда, по предположению, образы α в $H_n(X, X\backslash A)$ и $H_n(X, X\backslash B)$ равны нулю. Поскольку Φ инъективен, α сам равен нулю, что доказывает пункт (1) для $A \cup B$. Докажем пункт (2). Рассмотрим набор согласованных ориентаций α_x на $A \cup B$. По предположению, существует единственный такой элемент $\alpha_A \in H_n(X, X\backslash A)$, что его образ в $H_n(X, X\backslash x)$ есть α_x для всех $x \in A$. Аналогично, существует единственный такой элемент $\alpha_B \in H_n(X, X\backslash B)$, что его образ в $H_n(X, X\backslash x)$ есть α_x для всех $x \in B$. Гомоморфизм Ψ посылает пару $(\alpha_A, \alpha_B) \in H_n(X, X\backslash A) \oplus H_n(X, X\backslash B)$ в разность $\beta = \alpha_A|_{A\cap B} - \alpha_B|_{A\cap B} \in H_n(X, X\backslash A \cap B)$. Образ β в группе $H_n(X, X\backslash x)$ равен нулю для любого $x \in A \cap B$, и следовательно, поскольку Лемма выполнена для $A \cap B$, имеем $\beta = 0$. Из точности последовательности получаем, что (α_A, α_B) есть образ элемента $\alpha \in H_n(X, X\backslash A \cup B)$. Этот элемент обладает требуемыми свойствами и определен однозначно, поскольку Φ инъективен.

(2) Исходя из пункта (1), достаточно доказать Лемму для компактного подмножества, лежащего в одной карте (т.е. в $\mathbb{R}^n$). Действительно, любое компактное подмножество можно представить в виде конечного объединения k компактных подмножеств, каждое из которых целиком лежит в какой-то карте. Далее индукция по числу k и применение шага (1). Заметим, что если A — компактное подмножество, лежащее в

карте U, то $H_j(X, X\backslash A) \cong H_j(U, U\backslash A)$ по свойству вырезания. Значит дальше можно считать, что $X = \mathbb{R}^n$.

(3) Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — конечный симплициальный комплекс, чьи симплексы линейно вложены в $\mathbb{R}^n$. В этом случае лемма следует по индукции: достаточно доказать ее для одного симплекса и применить шаг (1). Заметим, что справедливость леммы для симплекса следует из определения согласованных ориентаций.

(4) Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный компакт. Допустим, класс $\alpha \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash A)$ представлен относительным циклом z, и пусть $C \subset \mathbb{R}^n\backslash A$ обозначает объединение образов всех сингулярных циклов, встречающихся в ∂z. Множества A и C компактны, значит между ними ненулевое расстояние $\delta > 0$. Покроем множество A конечным кусочно линейным комплексом K, не пересекающим C, следующим образом: (а) покроем A большим симплексом, (б) возьмем кратное барицентрическое подразбиение симплекса, у которого диаметр каждого кусочка меньше δ (в) возьмем все симплексы, пересекающие A. Все та же цепь z определяет элемент $\alpha_K \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash K)$, чье ограничение на $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash A)$ совпадает с α. Из шага (3) следует, что $\alpha_K = 0$, если $i > n$. Значит, $\alpha = 0$, и, как следствие, $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash A) = 0$ при $i > n$.

Пусть теперь $i = n$. Допустим, что ограничение $\alpha_x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash x)$ равно нулю при всех $x \in A$. Тогда, на самом деле $\alpha_x = 0$ при всех $x \in K$ (здесь рассматриваются ограничения элемента $\alpha_K \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash K)$). Это следует из того, что гомоморфизм $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash \Delta) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash x)$ является изоморфизмом для любого линейного симплекса Δ и точки x в нем. Поскольку $\alpha_x = 0$ для любого $x \in K$, из шага (3) следует, что $\alpha_K = 0$. Значит, $\alpha = 0$, что доказывает пункт 1 и единственность в пункте 2 Леммы. Существование доказывается просто: пусть α_x — согласованный набор локальных ориентаций для $x \in A$. Тогда его можно продолжить до согласованного набора ориентаций на достаточно большом шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, содержащем множество A. Для шара существование “накрывающего” элемента $\alpha_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash B)$ очевидно (из определения согласованных ориентаций). Образ элемента α_B в группе $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash A)$ есть искомый класс α. □

Предложение следует из леммы, если мы положим $A = X$. □

Элемент группы $H_n(X; R)$, чей образ в $H_n(X, X\backslash x; R)$ является образующей при всех $x \in X$, называется фундаментальным классом замкнутого многообразия X. Фундаментальный класс часто обозначается через $[X]$. Если на X фиксирована ориентация (т.е. согласованный выбор $\alpha_x \in H_n(X, X\backslash x, \mathbb{Z})$), то существует единственный фундаментальный класс $[X] \in H_n(X; \mathbb{Z})$, который переходит в α_x при всех $x \in X$. Таким образом, выбрать ориентацию на связном ориентируемом многообразии X — это все равно, что выбрать образующую группы $H_n(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Упражнение 2.12. Если X — некомпактное связное многообразие размерности n, то $H_j(X) = 0$ при всех $j \geqslant n$.

Пусть X — замкнутое многообразие размерности n. Рассмотрим множество $\widetilde{X} = \{\alpha_x \mid x \in X\}$, где $\alpha_x \in H_n(X, X\backslash x; \mathbb{Z})$ — локальная ориентация в точке x. Введем на

$\widetilde{X}$ топологию, базу которой образуют множества $\widetilde{B} = \{\alpha_x \mid x \in B\}$, где B — открытое подмножество в X, а α_x — набор согласованных на B локальных ориентаций.

Упражнение 2.13. (1) Докажите, что $\widetilde{X}$ — ориентируемое многообразие. (2) Отображение $\widetilde{X} \to X$, $\alpha_x \mapsto x$ является двулистным накрытием. (3) Пусть X связно. Тогда X ориентируемо в том и только том случае, когда $\widetilde{X}$ имеет две компоненты связности. (4) Если в $\pi_1(X)$ нет элементов порядка 2, то X ориентируемо. В частности, любое односвязное многообразие ориентируемо.

2.2 Двойственность Пуанкаре

Пусть X — произвольное топологическое пространство, а R — произвольное кольцо. По определению, модуль k-ых сингулярный коцепей есть двойственный модуль к модулю k-ых сингулярных цепей, т.е. $C^k(X;R) \cong \mathrm{Hom}(C_k(X;R), R)$. Таким образом, применяя k-мерную коцепь к k-мерной цепи, мы получаем число (т.е. элемент R). Это действие корректно опускается до групп (ко)гомологий: если $\phi \in H^k(X;R)$ и $\alpha \in H_k(X;R)$, то естественным образом определяется число $\phi(\alpha) \in R$. Иными словами, имеется естественный гомоморфизм $h\colon H^k(X;R) \to \mathrm{Hom}(H_k(X;R), R)$.

Оказывается, существует более общая операция, которая позволяет по k-мерному классу гомологий и l-мерному классу когомологий получить $(k-l)$-мерный класс гомологий.

Кэп-произведение Пусть $k \geqslant l \geqslant 0$. Определим R-билинейную операцию $\frown\colon C_k(X;R) \otimes C^l(X;R) \to C_{k-l}(X;R)$, называемую $\frown$-произведением (читается как “кэп-произведение”) следующим образом. Пусть $\sigma \in C_k(X;R)$, $\sigma\colon [v_0, \ldots, v_k] \to X$ — сингулярный симплекс, а $\phi \in C^l(X;R)$ — сингулярная коцепь. Тогда

$$\sigma \frown \phi = \phi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]})\sigma|_{[v_l,v_{l+1},\ldots,v_k]}.$$

Поскольку сингулярные симплексы образуют базис $C_k(X;R)$, по линейности это задает операцию $\frown\colon C_k(X;R) \otimes C^l(X;R) \to C_{k-l}(X;R)$.

Лемма 2.14. *$\partial(\sigma \frown \phi) = (-1)^l(\partial\sigma \frown \phi - \sigma \frown \delta\phi)$, где ∂ — гомологический дифференциал, а δ — когомологический дифференциал.*

Доказательство. Упражнение. □

Следствие 2.15. *Кэп-произведение цикла и коцикла есть цикл. Кэп-произведение цикла и кограницы есть граница. Кэп-произведение границы и коцикла есть граница.*

Значит, корректно определено индуцированное билинейное отображение

$$\frown\colon H_k(X;R) \otimes H^l(X;R) \to H_{k-l}(X;R),$$

которое также называется кэп-произведением.

Для кэп-произведения выполнена “функториальность” в следующем смысле. Пусть $f\colon X \to Y$ непрерывное отображение, а $f_*\colon H_*(X;R) \to H_*(Y;R)$, $f^*\colon H^*(Y;R) \to H^*(X;R)$ — индуцированные отображения в гомологиях и когомологиях соответственно. Тогда выполнено

$$f_*(\alpha) \frown \phi = f_*(\alpha \frown f^*(\phi)), \tag{2.1}$$

при $\alpha \in H_k(X;R)$ и $\phi \in H^l(Y;R)$.

По тем же формулам можно определить относительные аналоги кэп-произведения

$$H_k(X,A;R) \otimes H^l(X;R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X,A;R);$$

$$H_k(X,A;R) \otimes H^l(X,A;R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X;R).$$

Отображение двойственности Пуанкаре Теперь мы возвращаемся к ситуации, когда X — многообразие. Как и ранее, мы полагаем, что либо $R = \mathbb{Z}$ и многообразие X ориентируемо, либо $R = \mathbb{Z}_2$ и X произвольно.

Теорема 2.16 (Изоморфизм двойственности Пуанкаре)**.** *Пусть X — замкнутое n-мерное многообразие, имеющее фундаментальный класс $[X] \in H_n(X;R)$. Отображение $D\colon H^k(X;R) \to H_{n-k}(X;R)$, $D(\phi) = [X] \frown \phi$ является изоморфизмом при всех k.*

Доказательство будет дано в схематичном и урезанном виде (полностью его можно прочитать в [4]). Идея такая же, как и для Утверждения 2.10: (1) вначале мы сформулируем более общее утверждение, описывающее свойства произвольного открытого подмножества $A \subset X$; (2) Теорема 2.16 будет частным случаем утверждения, если положить $A = X$; (3) аргумент, использующий последовательность Майера–Вьеториса сведет утверждение к случаю, когда A лежит в одной карте; (4) останется доказать утверждение в случае $A \subset \mathbb{R}^n$.

Заметим, что открытое подмножество $A \subset X$ является многообразием, но уже не замкнутым, поэтому нам нужно модифицировать утверждение так, чтобы они имело смысл для произвольных многообразий. Для этого требуется ввести понятие когомологий с компактным носителем.

Определение 2.17. Пусть X — произвольное топологическое пространство. Коцепь $a \in C^i(X;R)$ называется коцепью с компактным носителем, если существует такое компактное подмножество $K \subset X$, что a принимает нулевое значение на сингулярных симплексах с образами в $X \backslash K$. Рассмотрим подгруппу $C^i_c(X;R) \subset C^i(X;R)$, порожденную коцепями с компактным носителем. Легко проверить, что $a \in C^i_c(X;R)$ влечет $\delta a \in C^{i+1}_c(X;R)$, а значит определен дифференциальный комплекс

$$0 \to C^0_c(X;R) \xrightarrow{\delta} C^1_c(X;R) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} C^i_c(X;R) \xrightarrow{\delta} C^{i+1}_c(X;R) \xrightarrow{\delta} \cdots.$$

Его когомологии называются когомологиями с компактными носителями и обозначаются $H^i_c(X;R)$.

Замечание 2.18. Из определения очевидно, что для компактного пространства X выполнено $H^*_c(X;R) = H^*(X;R)$.

Замечание 2.19. $H^i_c(X;R)$ является прямым пределом групп $H^i_c(X, X\backslash K;R)$ по всем компактным подмножествам $K \subset X$. Отсюда можно заключить, например, что $H^i_c(\mathbb{R}^n;R) = 0$ при $i \neq n$ и $H^n_c(\mathbb{R}^n;R) = R$. Видно, что для некомпактных пространств когомологии с компактными носителями могут не совпадать с обычными.

Пусть X — n-мерное многообразие без края. Для любого компактного подмножества $C \subset X$ имеем кэп-произведение:

$$H_n(X, X\backslash C;R) \otimes H^k(X, X\backslash C;R) \xrightarrow{\frown} H_{n-k}(X;R).$$

По Лемме 2.11, в группе $H_n(X, X\backslash C;R)$ есть выделенный элемент α_C, который отображается в ориентацию $\alpha_x \in H_n(X, X\backslash x;R)$ при всех $x \in C$. Значит, можно рассмотреть гомоморфизм

$$D_{X,C} \colon H^k(X, X\backslash C;R) \to H_{n-k}(X;R), \quad D_{X,C}(\phi) = \alpha_C \frown \phi.$$

Используя функториальность кэп-произведения (в смысле (2.1)), и тот факт, что α_{C_1} переходит в α_{C_2} при $C_2 \subset C_1$, мы можем перейти к пределу гомоморфизмов $D_{X,C}$ по всем компактным подмножествам $C \subset X$. В итоге получим гомоморфизм

$$D_X \colon H^k(X;R) \to H_{n-k}(X;R).$$

Легко проверить, что в случае, когда X компактно, этот гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом двойственности Пуанкаре D, определенным ранее.

Предложение 2.20 (Двойственность Пуанкаре для произвольных многообразий). *Пусть X — n-мерное многообразие без края, возможно некомпактное. Отображение $D_X \colon H^k_c(X;R) \to H_{n-k}(X;R)$ является изоморфизмом.*

Лемма 2.21. *Пусть многообразие X представлено в виде объединения двух открытых подмножеств A, B. Тогда диаграмма двух последовательностей Майера–Вьеториса*

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^k_c(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "D_{A\cap B}"] & H^k_c(A)\oplus H^k_c(B) \arrow[r] \arrow[d, "D_A \oplus -D_B"] & H^k_c(X) \arrow[r] \arrow[d, "D_X"] & H^{k+1}_c(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "D_{A\cap B}"] & {} \\
{} \arrow[r] & H_{n-k}(A\cap B) \arrow[r] & H_{n-k}(A)\oplus H_{n-k}(B) \arrow[r] & H_{n-k}(X) \arrow[r] & H_{n-k-1}(A\cap B) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до знаков.

Из этой леммы и леммы о пяти изоморфизмах, получаем, что если D_A, D_B, $D_{A\cap B}$ — изоморфизмы, то $D_{A\cup B}$ — также изоморфизм.

Лемма 2.22. *Пусть X есть объединение вполне упорядоченной цепочки открытых множеств A_α. Если D_{A_α} является изоморфизмом при всех α, то D_X также является изоморфизмом.*

Лемма 2.23. *Если A — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, D_A является изоморфизмом.*

Из этих лемм (которые мы доказывать не будем, см. [4]) следует доказательство утверждения 2.20. Действительно, пусть X — произвольное многообразие. Рассмотрим совокупность $\mathcal{M}$ всех открытых подмножеств $A \subset X$, для которых D_A — изоморфизм. $\mathcal{M}$ частично упорядочено по включению, и вместе с любой возрастающей цепочкой содержит ее верхнюю границу (по Лемме 2.22). Значит, по лемме Цорна, существует максимальный элемент $A_{\max} \in \mathcal{M}$. Если $A_{\max} = X$, то все доказано. Если нет, то выберем точку $x \in X$, $x \notin A_{\max}$ и рассмотрим малую окрестность $U \ni x$, лежащую в карте. По Лемме 2.23 $U \in \mathcal{M}$ и $U \cap A_{\max} \in \mathcal{M}$. Значит, по Лемме 2.21, $U \cup A_{\max} \in \mathcal{M}$, что противоречит максимальности $A_{\max}$.

2.3 Кольцо когомологий замкнутого многообразия

Лемма 2.24. *Для любого $\alpha \in C_{k+l}(X;R)$, $\phi \in C^k(X;R)$ и $\psi \in C^l(X;R)$ имеем*

$$\psi(\alpha \frown \phi) = (\psi \smile \phi)(\alpha).$$

Доказательство. Упражнение. □

Упражнение 2.25. Пусть $\epsilon\colon H_0(X;R) \to R$ — гомоморфизм аугментации. Тогда $\epsilon(\alpha \frown \phi) = \phi(\alpha)$ для любых $\alpha \in C_k(X;R)$ и $\phi \in C^k(X;R)$.

Кэп- и кап-произведения опускаются на уровень (ко)гомологий. В итоге имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^l(X;R) & \xrightarrow{h} & \mathrm{Hom}(H_l(X;R),R) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \phi\smile} & & \big\downarrow{\scriptstyle (\frown\phi)^*} \\ H^{k+l}(X;R) & \xrightarrow{h} & \mathrm{Hom}(H_{k+l}(X;R),R) \end{array}$$

Предложение 2.26. *Пусть X — связное замкнутое многообразие (как и ранее, мы предполагаем, что либо X ориентируемо, и $R = \mathbb{Z}$ или поле, либо X произвольное, а $R = \mathbb{Z}_2$). Тогда*

1. *Гомоморфизм $\int_X\colon H^n(X;R) \to R$, $\int_X(\phi) = \phi([X])$ является изоморфизмом.*

2. *Билинейное спаривание $H^k(X;R) \otimes H^{n-k}(X;R) \to R$, $\phi \otimes \psi \to \int_X(\phi \smile \psi)$ невырожденно (в случае $R = \mathbb{Z}$ нужно факторизовать конечное кручение).*

Доказательство. (1) Гомоморфизм $\int_X\colon H^n(X;R) \to R$ совпадает с композицией изоморфизма двойственности Пуанкаре $D\colon H^n(X;R) \to H_0(X;R)$ и гомоморфизма аугментации $H_0(X;R) \to R$ (см. упр.2.25). Аугментация является изоморфизмом, поскольку X связно.

(2) Рассмотрим композицию гомоморфизмов

$$H^k(X;R) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}(H_k(X;R),R) \xrightarrow{D^*} \mathrm{Hom}(H^{n-k}(X;R),R).$$

Из леммы 2.24 имеем $D^* \circ h(\phi) = \phi \smile \cdot$. По теореме об универсальных коэффициентах, h является изоморфизмом (над полем, либо над $\mathbb{Z}$ с факторизованным кручением). D^* является изоморфизмом по теореме о двойственности Пуанкаре. Таким образом, билинейное спаривание $H^k(X;R) \otimes H^{n-k}(X;R) \xrightarrow{\smile} H^n(X;R)$ невырожденно по первому аргументу, а значит и по второму, поскольку $\smile$ — кососоммутативно. Остальное следует из п.(1). $\square$

Мы, наконец, доказали Утверждение 2.1.

2.4 Двойственность Пуанкаре через триангуляции

Фундаментальный класс В этом разделе мы научимся понимать ориентации и изоморфизм $H^k(X;R) \cong H_{n-k}(X;R)$ более наглядным способом: в терминах триангуляций и двойственных клеточных разбиений.

Лемма 2.27. *Пусть K — триангуляция (гомологического) многообразия размерности n. Тогда все максимальные по включению симплексы K имеют размерность n, и каждый $(n-1)$-мерный симплекс содержится ровно в двух n-мерных.*

Доказательство. Пусть I — максимальный по включению симплекс K, а x — точка, лежащая в его внутренности I°. Пусть I имеет размерность s. Тогда, поскольку внутренность I есть открытое подмножество s-мерного пространства, имеем

$$H_j(X, X\backslash x; R) \cong H_j(I^\circ, I^\circ\backslash x; R) \cong \begin{cases} R, & \text{если } j = s; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из того, что K есть n-мерное многообразие, заключаем, что $s = n$.

Докажем вторую часть утверждения. Пусть x — точка, лежащая в относительной внутренности $(n-1)$-мерного симплекса J. Допустим, J содержится в k максимальных симплексах $I_1, \ldots, I_k$. Пусть $i_j \in I_j$ — вершина симплекса, не лежащая в грани J для каждого $j = 1, \ldots, k$. Имеем

$$\begin{aligned} &H_n(X, X\backslash x; R) \cong H_n(I_1 \cup \cdots \cup I_k, I_1 \cup \cdots \cup I_k\backslash x; R) \cong \\ &\quad \cong \widetilde{H}_{n-1}(I_1 \cup \cdots \cup I_k\backslash x; R) \cong \widetilde{H}_{n-1}(\partial J * \{i_1, \ldots, i_k\}; R) \cong \widetilde{H}_0(\{i_1, \ldots, i_k\}; R) \cong R^{k-1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

В первом изоморфизме мы воспользовались свойством вырезания (вырезали дополнение до $I_1 \cup \cdots \cup I_r$). Второй изоморфизм следует из точной последовательности пары

$$\widetilde{H}_n(I_1 \cup \cdots \cup I_r; R) \to H_n(I_1 \cup \cdots \cup I_r, I_1 \cup \cdots \cup I_r\backslash x; R) \to \widetilde{H}_{n-1}(I_1 \cup \cdots \cup I_r\backslash x; R) \to \widetilde{H}_{n-1}(I_1 \cup \cdots \cup I_r; R)$$

и того факта, что $I_1 \cup \cdots \cup I_r$ стягиваемо. Третий изоморфизм следует из того, что $I_1 \cup \cdots \cup I_r\backslash x$ стягивается на $\partial J * \{i_1, \ldots, i_k\}$. Четвертый изоморфизм есть $(n-1)$-кратное применение изоморфизма надстройки. Последний изоморфизм есть явное вычисление.

По определению гомологического многообразия имеем $H_n(X, X\backslash x; R) \cong R$. Значит $r = 2$. $\square$

Замечание 2.28. Понятно, что для того, чтобы получить окрестность гомеоморфную $\mathbb{R}^n$ необходимо в каждом $(n-1)$-симплексе состыковать ровно 2 n-мерных симплекса — ни больше, ни меньше. Приведенное хитрое рассуждение с гомологиями нужно скорее для тренировки умения работать с гомологиями. Кроме того, оно понадобится для решения задач.

Далее будем считать, что многообразие K ориентируемо и $R = \mathbb{Z}$ (случай произвольного многообразия и коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ полностью аналогичен). Фундаментальный класс многообразия K представляется симплициальной цепью $\sum_j k_j I_j$, где $k_j \in \mathbb{Z}$, а I_j — максимальные симплексы. Выберем точку x во внутренности симплекса I_j. Из условия, что фундаментальный класс отображается в образующую группы $H_n(X, X\backslash x; \mathbb{Z}) \cong H_n(I, I\backslash x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, получаем, что соответствующий коэффициент k_j равен ± 1.

Цепь $\sum_j k_j I_j$ является симплициальным циклом. Значит, если два максимальных симплекса I_l, I_s соседствуют по $(n-1)$-мерному симплексу, то знак k_l определяет знак k_s и наоборот. Если многообразие K связно, то возможность согласованно выбрать знаки максимальных симплексов (в указанном смысле) эквивалентна ориентируемости. В этом случае выбор знаков максимальных симплексов эквивалентен выбору ориентации.

Замечание 2.29. В этом построении был замят под ковер один существенный факт. А именно, если K — связное многообразие, то от любого n-мерного симплекса к любому другому можно пройти “переходя через стенку размерности $n-1$”. Более строго, скажем, что симплициальный комплекс K (размерностно однородный, $\dim K = n$) сильно связен, если для любых двух максимальных симплексов I, I' существует цепочка $I = I_0, I_1, \ldots, I_{s-1}, I_s = I'$ такая что симплексы I_j и I_{j+1} имеют общую грань размерности $n-1$ при $j = 0, 1, \ldots, s-1$. Иными словами, любые две точки комплекса K можно соединить кривой, не пересекающей $(n-2)$-остов комплекса K.

Заметим, что вообще говоря существуют комплексы, которые связны, но не сильно связны, например букет двух сфер (рис.1). Утверждение, которое мы замяли, таково: связное триангулированное многообразие является сильно связным. Для топологических многообразий его можно объяснить так: любую кривую в $\mathbb{R}^n$ можно немного пошевелить так, чтобы она не пересекала заданное подмножество коразмерности 2. Значит, то же верно и для многообразия, и, следовательно, кривую, соединяющую две точки K, можно превратить в кривую, соединяющую их же и не пересекающую $(n-2)$-остов.

Упражнение 2.30. Пусть K — триангуляция топологического (или гомологического) многообразия, $\dim K = n$, и пусть J — симплекс размерности k. Для каждого максимального симплекса I, содержащего J, рассмотрим его грань, противоположную J (т.е. грань, вершины которой не содержатся в J). Обозначим эту грань символом $I\backslash J$.

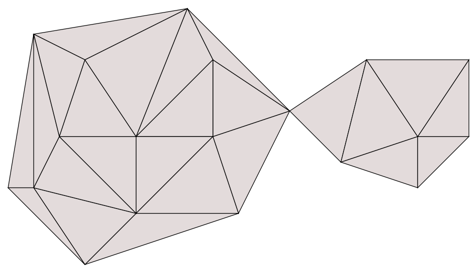

Рис. 1: Связный но не сильно связный симплициальный комплекс

Объединение симплексов $I \backslash J$ по всем I, содержащим J, называется линком симплекса J. Докажите, что

1. Линк является размерностно однородным пространством размерности $n - \dim\ J - 1$.
2. Линк имеет гомологии как у сферы размерности $n - \dim J - 1$.
3. Линк симплекса размерности $n - 2$ гомеоморфен окружности.
4. Линк является гомологическим многообразием.

Упражнение 2.31. Используя предыдущее упражнение и индукцию, докажите, что триангуляция связного гомологического многообразия сильно связна.

Двойственное блочное разбиение Пусть K — триангуляция многообразия X. Определим барицентрическое подразбиение K' следующим образом. Пусть a_I — барицентр симплекса $I \in K$. Тогда k-мерные симплексы барицентрического подразбиения имеют вид $[a_{I_0}, a_{I_1}, \dots, a_{I_k}]$, где $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_k$ — цепочки вложенных симплексов комплекса K. Для симплекса I определим подмножество $F_I \subset K'$ как объединение всех симплексов $[a_{I_0}, a_{I_1}, \dots, a_{I_k}]$, для которых $I_0 \supseteq I$. Множество F_I называется блоком, двойственным к симплексу I. Определим также множество ∂F_I как объединение всех симплексов $[a_{I_0}, a_{I_1}, \dots, a_{I_k}]$, для которых $I_0 \supsetneq I$.

Упражнение 2.32. Если X — многообразие размерности n, то $\dim F_I = n - \dim I$ и $\dim \partial F_I = n - \dim I - 1$. Симплекс I и двойственный блок F_I пересекаются по единственной точке — барицентру a_I симплекса I.

Упражнение 2.33. $I \subset J \Leftrightarrow F_J \subset F_I$. Граница ∂F_I является объединением блоков F_J по всем $J \supset I$. Объединение всех блоков есть K.

Упражнение 2.34. Докажите, что F_I — стягиваемо, а ∂F_I гомеоморфно линку симплекса I (см. упр.2.30). В частности, ∂F_I имеет гомологии как у сферы размерности $n - \dim I - 1$.

Упражнение 2.35. Пусть $k = \dim F_I$. Тогда $H_j(F_I, \partial F_j; R) = 0$ при $j \neq k$ и $H_k(F_I, \partial F_j; R) \cong R$.

Разбиение многообразия X на блоки F_I называется двойственным к триангуляции K клеточным разбиением. Мы будем обозначать его через K^*.

Упражнения показывают, что двойственное разбиение K^* очень похоже на клеточное разбиение — за тем лишь исключением, что F_I могут не являться топологическими шарами. Однако они являются гомологическими шарами, и по разбиению многообразия X на блоки F_I можно построить "клеточные" гомологии — так же, как это делалось для настоящих клеточных разбиений. Этим мы сейчас и займемся.

Рассмотрим двойственную фильтрацию $K^0 \subset K^1 \subset \cdots \subset K^n = K^*$, где K^j есть объединение всех блоков F_I размерности $\leqslant j$. Определим группу $\mathcal{C}_j(K^*; R) = H_j(K^j, K^{j-1}; R) \cong \bigoplus_{\dim F_I = j} H_j(F_I, \partial F_I; R)$ при $j \geqslant 0$. Зададим дифференциал $\partial \colon \mathcal{C}_j(K^*; R) \to \mathcal{C}_{j-1}(K^*; R)$, как связывающий гомоморфизм

$$\partial_* \colon H_j(K^j, K^{j-1}; R) \to H_{j-1}(K^{j-1}, K^{j-2}; R)$$

из точной последовательности тройки (K^j, K^{j-1}, K^{j-2}). Тогда последовательность гомоморфизмов

$$\mathcal{C}_n(K^*; R) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_{n-1}(K^*; R) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{C}_1(K^*; R) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_0(K^*; R) \xrightarrow{d} 0$$

является дифференциальным комплексом. Точно так же, как это делалось для клеточных комплексов, можно показать, что его гомологии $H_j(K^*; R)$ изоморфны сингулярным гомологиям $H_j(X; R)$.

Предложение 2.36. *Группы $\mathcal{C}^j(K; R)$ и $\mathcal{C}_{n-j}(K^*; R)$ изоморфны, и при этих изоморфизмах когомологический дифференциал разбиения K переходит в гомологический дифференциал разбиения K^*.*

Доказательство. Каждому симплексу I разбиения K однозначно соответствует двойственная клетка F_I двойственного разбиения K^*, причем, если $\dim I = j$, то $\dim F_I = n-j$, поэтому наличие изоморфизма между $\mathcal{C}^j(K; R)$ (группой, свободно порожденной функциями на j-мерных симплексах) и $\mathcal{C}_{n-j}(K^*; R)$ (группой, порожденной $(n-j)$-мерными блоками) очевидно.

Чтобы построить изоморфизм, уважающий дифференциалы, надо согласовать ориентации симплексов и блоков. Введем вспомогательное пространство. Пусть $G_I \subset K'$ есть объединение всех симплексов барицентрического подразбиения, содержащих барицентр a_I, а ∂G_I — его граница (т.е. объединение всех симплексов в G_I, которые не содержат a_I). Имеем $G_I = \operatorname{Cone} \partial G_I$ и $G_I \cong \partial I * \partial F_I$. Ориентацией симплекса I, $\dim I = j$ называется образующая s_I группы $H_j(I, \partial I)$. Ориентацией блока F_I, $\dim F_I = n-j$ называется образующая t_{F_I} группы $H_{n-j}(F_I, \partial F_I)$. Скажем, что ориентации s_I и t_{F_I} согласованны, если при естественных изоморфизмах

$$\begin{aligned} H_j(I, \partial I) \otimes H_{n-j}(F_I, \partial F_I) \to H_{j-1}(\partial I) \otimes H_{n-j-1}(\partial F_I) \to H_{n-1}(\partial I * \partial F_I) = \\ = H_{n-1}(\partial G_I) \leftarrow H_n(G_I, \partial G_I) \leftarrow H_n(G_I, G_I \backslash a_I) \leftarrow H_n(X, X \backslash a_I) \end{aligned} \tag{2.3}$$

элемент $s \otimes t$ переходит в локальную ориентацию в точке $a_I \in X$.

Пусть изоморфизм $\eta\colon \mathcal{C}_{n-j}(K^*;R) \to \mathcal{C}^j(K;R)$ отображает элемент t_{F_I} в симплициальную коцепь, которая принимает значение 1 на симплексе I и 0 на всех прочих симплексах. Тогда имеем $\eta \circ \partial = \delta \circ \eta$ (доказательство состоит в муторной проверке того, что невырожденное спаривание (2.3) хорошо согласуется с приклеивающими отображениями $\partial_*\colon H_{j+1}(J,\partial J) \to H_j(I,\partial I)$ и $\partial_*\colon H_{n-j}(F_I,\partial F_I) \to H_{n-j-1}(F_J,\partial F_J)$). $\square$

В качестве следствия получаем, что $H^j(X;R) \cong H^j(K;R) \cong H_{n-j}(K^*;R) \cong H_{n-j}(X;R)$.

2.5 Обобщения двойственности Пуанкаре

Приведем без доказательства некоторые обобщения двойственности Пуанкаре. Пусть X — компактное (ориентируемое при $R = \mathbb{Z}$ и произвольное при $R = \mathbb{Z}_2$) многообразие с краем, $\dim X = n$. Тогда существует выделенный элемент $[X] \in H_n(X,\partial X) \cong R$, который также называется фундаментальным классом.

Теорема 2.37 (Двойственность Пуанкаре–Лефшеца)**.** *Пусть X — компактное многообразие с краем, $\dim X = n$. Тогда имеют место изоморфизмы, индуцированные $\frown$-произведением с фундаментальным классом:*

$$H^j(X,\partial X) \cong H_{n-j}(X), \qquad H_j(X,\partial X) \cong H^{n-j}(X).$$

Теорема 2.38 (Двойственность Пуанкаре–Александера–Лефшеца)**.** *Пусть X — замкнутое многообразие и $B \subset A \subset X$ — замкнутые подмножества. Тогда*

$$H^j(X\backslash B, X\backslash A) \cong H_{n-j}(A,B).$$

В частности, $H^j(X, X\backslash A) \cong H_{n-j}(A)$.

Теорема 2.39 (Двойственность Александера)**.** *Пусть $A \subset S^n$ — замкнутое подмножество сферы. Тогда*

$$\widetilde{H}_j(A) \cong \widetilde{H}^{n-1-j}(S^n\backslash A).$$

Упражнение 2.40. Вывести двойственность Пуанкаре, двойственность Пуанкаре–Лефшеца и двойственность Александера из двойственности Пуанкаре–Александера–Лефшеца.

3 Гладкие многообразия

Способ определить умножение в когомологиях, введенный в прошлой части курса, удобен и универсален, однако исторически он не был самым первым. Изначально под умножением понималась теория пересечений на гладких многообразиях, имеющая более наглядную и геометрическую природу.

3.1 Основные определения

Пусть X — многообразие. Пусть U — окрестность точки $x \in X$ и $\varphi\colon U \to V$ — гомеоморфизм на подмножество $\mathbb{R}^n$, существующий по определению. Подмножество U (вместе с фиксированным гомеоморфизмом φ) называется картой на многообразии X. Множество карт U_α, $\alpha \in A$, покрывающее все многообразие X, называется атласом на X.

Допустим, что карты U_α, U_β пересекаются. Тогда $V_{\alpha,\beta} \overset{\text{def}}{=} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\alpha$ есть открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Аналогично, $V_{\alpha,\beta} \overset{\text{def}}{=} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\alpha$ — есть (вообще говоря, уже другое) открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Имеем гомеоморфизм

$$\psi_{\alpha,\beta}\colon V_{\alpha,\beta} \overset{\varphi_\alpha^{-1}}{\to} U_\alpha \cap U_\beta \overset{\varphi_\beta}{\to} V_{\beta,\alpha}.$$

Гомеоморфизм $\psi_{\alpha,\beta}$ называется функцией склейки. Заметим, что функция склейки отображает открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ в открытое подмножество $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.1. Атлас называется гладким, если все функции склейки являются гладкими отображениями с ненулевым якобианом. Два гладких атласа называются эквивалентными, если их объединение — снова гладкий атлас. Гладкая структура на X — это класс эквивалентности гладких атласов. Гладкое многообразие — это топологическое многообразие с фиксированной на нем гладкой структурой.

Замечание 3.2. Понятие гладкого многообразия нетривиально по многим причинам. Во-первых, существуют топологические многообразия (в том числе компактные), на которых гладких атласов (а значит и гладких структур) нет. Во-вторых, существуют топологические многообразия, и такие гладкие структуры на них, которые не переводятся друг в друга никаким гомеоморфизмом.

Упражнение 3.3. На $S^n, \mathbb{C}P^n, T^n, \mathbb{R}P^n$ можно естественным образом ввести гладкую структуру.

Упражнение 3.4. Ввести гладкую структуру на произведении гладких многообразий.

Упражнение 3.5. Докажите, что множество всех k-мерных векторных подпространств в n-мерном векторном пространстве V (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) является гладким многообразием. Оно называется многообразием Грассмана или грассманианом и обозначается $G_k(V)$ (или $G_{n,k}$).

Определение 3.6. Непрерывное отображение гладких многообразий $f\colon M^m \to N^n$ называется гладким в точке $x \in M$, если существуют карты $U_1 \ni x$, $\phi\colon U_1 \to V_1 \subset \mathbb{R}^m$ и $U_2 \ni f(x)$, $\psi\colon U_2 \to V_2 \subset \mathbb{R}^n$ (в гладких атласах на M и N соотв.), такие что $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ есть гладкое отображение из подмножества $\mathbb{R}^m$ в подмножество $\mathbb{R}^n$. Отображение f называется гладким, если оно гладкое во всех точках.

Гладкой кривой на M называется гладкое отображение $l\colon \mathbb{R} \to M$. Пусть $x \in M$, и $U \ni x$, $\phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^m$ — карта гладкого атласа. Рассмотрим множество всех гладких кривых на M, таких что $l(0) = x$, и введем на нем отношение эквивалентности: $l_1 \sim l_2$, если

$$\operatorname{dist}(\phi(l_1(t)), \phi(l_2(t))) = \bar{\bar{o}}(t), \quad t \to 0.$$

Легко проверить, что это определение не зависит от выбора карты гладкого атласа.

Определение 3.7. Класс эквивалентности кривых называется касательным вектором к гладкому многообразию в точке x. Множество касательных векторов к M в точке x обозначается $T_x M$.

Если фиксировать карту $\phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^m$, содержащую x, то каждому касательному вектору $[l]$, $l\colon \mathbb{R} \to M$ в точке $x \in M$ однозначно сопоставляется вектор $\frac{\partial\phi(l(t))}{\partial t} \in \mathbb{R}^m$. Таким образом на $T_x M$ имеется структура векторного пространства над $\mathbb{R}$. Эта структура не зависит от выбора карты в гладком атласе. $T_x M$ называется касательным пространством в точке $x \in M$.

Определение 3.8. Гладкое отображение $f\colon M^m \to N^n$ переводит кривые на M в кривые на N, причем эквивалентные кривые переходят в эквивалентные кривые. Таким образом, определено отображение $D_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N$, называемое дифференциалом отображения f в точке x. Дифференциал является линейным отображением касательных пространств.

Определение 3.9. Гладкое отображение $f\colon M \to N$ называется иммерсивным (соотв. субмерсивным) в точке $x \in M$, если $D_x f$ — мономорфизм (соотв. эпиморфизм). f называется иммерсией или погружением (соотв. субмерсией), если оно иммерсивно (соотв. субмерсивно) в каждой точке. f называется вложением, если оно является погружением и гомеоморфно отображает многообразие M на его образ. Образ вложения $f\colon M \to N$ называется гладким подмногообразием в N.

Определение 3.10. Если отображение $f\colon M \to N$ субмерсивно в точке $x \in M$, то точка x называется регулярной. В противном случае x называется критической точкой, а $f(x)$ — критическим значением. Все точки $y \in N$, не являющиеся критическими значениями, называются регулярными значениями (даже если они не лежат в образе f).

Теорема 3.11. *Если $y \in N$ — регулярное значение для отображения $f\colon M \to N$, то $f^{-1}(y)$ есть гладкое подмногообразие в M.*

Определение 3.12. Отображение $f\colon M \to N$ трансверсально к подмногообразию $A \subset N$, если для любой точки $y = f(x) \in A$ выполнено $T_y A + D_x(T_x M) = T_y N$.

Теорема 3.13. *Если $f\colon M \to N$ трансверсально к подмногообразию $A \subset N$, то $f^{-1}(A)$ является гладким подмногообразием в M. Коразмерность $f^{-1}(A)$ в M совпадает с коразмерностью A в N.*

Теорема 3.14 (Теорема Тома–Сарда о трансверсальности)**.** *Подпространство гладких отображений $f\colon M \to N$ трансверсальных к $A \subset N$ всюду плотно в пространстве всех гладких отображений.*

Вывод из вышесказанного таков: если A, M — гладкие подмногообразия в N, то одно из них всегда можно немного пошевелить так, чтобы они стали трансверсальными. В этом случае их пересечение $A \cap M$ — это опять гладкое подмногообразие, причем

$$\operatorname{codim}(A \cap M) = \operatorname{codim} A + \operatorname{codim} M.$$

Имеем $T_x(A \cap M) = T_xA \cap T_xM \subset T_xN$ для всех $x \in A \cap M$.

3.2 Ориентация на трансверсальном пересечении

В гладком случае выбор локальной ориентации в точке $x \in M$ эквивалентен выбору ориентации касательного пространства T_xM.

Пусть M, A — трансверсальные гладкие подмногообразия многообразия N, и пусть на всех многообразиях M, A, N зафиксирована ориентация. Положим $n = \dim N$, $p = \operatorname{codim} A$, $q = \operatorname{codim} M$.

Ориентации векторных пространств T_xN, T_xM, T_xA определяют ориентацию векторного пространства $T_xA \cap T_xM$ при помощи следующего соглашения. Выберем положительный базис

$$u_1, \ldots, u_{n-p-q}, v_1, \ldots, v_q, w_1, \ldots, w_p$$

пространства T_xM таким образом, чтобы $u_1, \ldots, u_{n-p-q}, v_1, \ldots, v_q$ был положительным базисом пространства T_xA, а $u_1, \ldots, u_{n-p-q}, w_1, \ldots, w_p$ был положительным базисом пространства T_xM. Условимся считать $u_1, \ldots, u_{n-p-q}$ положительным базисом пространства $T_x(A \cap M) = T_xA \cap T_xM$.

Выбор ориентаций задает фундаментальные классы $[N] \in H_n(N; \mathbb{Z})$, $[A] \in H_{n-p}(A; \mathbb{Z})$, $[M] \in H_{n-q}(M; \mathbb{Z})$, $[A \cap M] \in H_{n-p-q}(A \cap M; \mathbb{Z})$, а также изоморфизм Пуанкаре $D\colon H^j(N; \mathbb{Z}) \to H_{n-j}(N; \mathbb{Z})$, $\phi \mapsto [N] \frown \phi$. Образы фундаментальных классов $[A]$, $[M]$, $[A \cap M]$ при гомоморфизмах, индуцированных вложениями подмногообразий, лежат в гомологиях многообразия N, и мы для удобства будем обозначать обозначать их теми же символами, т.е. будем считать, что $[A] \in H_{n-p}(N)$, $[M] \in H_{n-q}(N)$, $[A \cap M] \in H_{n-p-q}(N)$.

Теорема 3.15. *При условиях, описанных выше, имеем*

$$D^{-1}([A \cap M]) = D^{-1}([A]) \smile D^{-1}([M]).$$

Иными словами, операция геометрического пересечения циклов двойственна к операции умножения в когомологиях.

Приведем одно частное следствие, которое оказывается полезным на практике. Пусть $\dim A + \dim M = \dim N$, и пусть ϕ_A, ϕ_M — когомологические классы, двойственные к подмногообразиям A и M. Тогда число $\int_N (\phi_A \smile \phi_M) \in \mathbb{Z}$ равно числу точек пересечения подмногообразий A и M с учетом знаков.

Упражнение 3.16. Описать кольца когомологий многообразий $T^n, \mathbb{C}P^n, M_g$, используя пересечения подмногообразий.

Упражнение 3.17. Часовщик смастерил часы с неразличимыми минутной и часовой стрелкой. Сколько раз в день по таким часам нельзя точно определить время? Ход стрелок непрерывный, циферблат 12-часовой.

Упражнение 3.18. (*) Сколько существует аффинных прямых в $\mathbb{C}^3$, которые пересекают каждую из четырех данных прямых, находящихся в общем положении? Докажите, что это число совпадает с $|\int_{G_{2,4}(\mathbb{C})} \omega_A^4|$, где $G_{2,4}(\mathbb{C})$ — грассманиан 2-мерных плоскостей в 4-мерном вещественном пространстве, $A \subset G_{2,4}(\mathbb{C})$ — 3-мерное подмногообразие плоскостей, пересекающих заданную плоскость, а $\omega_A \in H^1(G_{2,4}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ — двойственный к $[A]$ когомологический класс.[2]

4 Расслоения со структурной группой

4.1 Главные G-расслоения

Везде далее G обозначает топологическую группу, то есть: G — группа, G — топологическое пространство, операции умножения $G \times G \to G$ и взятия обратного элемента $G \to G$ непрерывны. Более того, все пространства, включая G, в дальнейшем будут предполагаться CW-комплексами

Определение 4.1. G-расслоением (или расслоением со структурной группой G) называется следующий набор объектов:

(1) $p\colon E \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F.

(2) Тривиализующее покрытие $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ вместе с набором тривиализаций $\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

Пусть отображение $\varphi_{\alpha,x}\colon p^{-1}(x) \to F$ задано формулой $\varphi_{\alpha,x}(y) = pr_2(\varphi_\alpha(y)) \in F$. Если $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, то $\psi_{\alpha,\beta,x} = \varphi_{x,\beta} \circ \varphi_{x,\alpha}^{-1}\colon F \to F$ называется функцией перехода.

(3) G — подгруппа группы гомеоморфизмов слоя $G \subset \mathrm{Homeo}(F)$, такая что все функции перехода лежат в G и, кроме того, отображение $\psi_{\alpha,\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$, $x \to \psi_{\alpha,\beta,x}$ непрерывно.

Говоря по-простому, G-расслоения — это расслоения, в которых все функции перехода лежат в $G \subset \mathrm{Homeo}(F)$.

Два G-расслоения называются эквивалентными, если у них совпадают p, E, B, а объединение их тривиализующих покрытий вновь является тривиализующим покрытием для некоторого G-расслоения.

[2]Посчитать, что этот интеграл равен 2, — это уже дело техники

Заметим, что функции перехода удовлетворяют следующим условиям, называемым условиями коцикла:

$$\psi_{\alpha,\beta} = \psi_{\beta,\alpha}^{-1}, \qquad \psi_{\beta,\gamma} \circ \psi_{\alpha,\beta} = \psi_{\alpha,\gamma}. \tag{4.1}$$

Если дано пространство B, покрытие $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, пространство F, подгруппа G его гомеоморфизмов, и набор непрерывных отображений $\psi_{\alpha,\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$, удовлетворяющий условиям (4.1), то по этим данным можно единственным образом восстановить G-расслоение:

$$E = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times F/\sim,$$

где $(x, f) \sim (x', f')$, если $x = x' \in U_\alpha \cap U_\beta$, $f' = \psi_{\alpha,\beta}(x)(f)$.

Определение 4.2. Главным G-расслоением называется G-расслоение, у которого слой F гомеоморфен G, причем G действует на F умножением слева.

Заметим, что G действует на $F \cong G$ также умножением справа, и это действие коммутирует с умножением слева. Поэтому корректно определено правое действие G на тотальном пространстве главного G-расслоения. Это действие свободно, а его орбиты — это в точности слои главного G-расслоения. Приходим к эквивалентному определению.

Определение 4.3. Главным G-расслоением называется локально тривиальное расслоение $p \colon E \to B$ со свободным правым действием группы G на E, таким что орбиты этого действия совпадают со слоями расслоения.

Базу главного G-расслоения можно отождествить с пространством орбит G-действия.

Конструкция 4.4. По любому G-расслоению η можно каноническим способом построить главное G-расслоение, взяв ту же базу B, то же покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ и те же функции перехода $\psi_{\alpha,\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$, но заменив слой на G. Это главное G-расслоение называется ассоциированным с η.

Пример 4.5. Лента Мебиуса с краем представляет из себя $\mathbb{Z}_2$-расслоение с базой S^1 и слоем $I = [-1; 1]$, где $\mathbb{Z}_2$ действует на I переменой знака. Ассоциированное главное $\mathbb{Z}_2$-расслоение является расслоением над S^1 со слоем $F \cong \mathbb{Z}_2$ из двух точек, а именно двулистным накрытием $S^1 \to S^1$.

Утверждение 4.6. *Пусть $p \colon E \to B$ — G-расслоение со слоем F (соотв. главное G-расслоение), и $f \colon B' \to B$ — непрерывное отображение. Тогда индуцированное расслоение $f^*E \to B'$ является G-расслоением со слоем F (соотв. главным G-расслоением). Гомотопные отображения f, f' индуцируют эквивалентные G-расслоения.*

Напомним, что $f^*E = \{(e, b') \in E \times B' \mid p(e) = f(b')\}$, а отображение $f^*E \to B'$ есть проекция на вторую координату.

Пусть EG — стягиваемый CW-комплекс, на котором G действует справа свободно. Действие определяет на EG структуру главного G-расслоения $p_G \colon EG \to BG$, где $BG = EG/G$ — пространство орбит. Это расслоение называется универсальным (главным) G-расслоением, а BG — классифицирующим пространством.

Теорема 4.7 (Теорема о классификации главных G-расслоений)**.** *Для любого главного G-расслоения $p\colon E \to B$ существует единственное с точностью до гомотопии отображение $f\colon B \to BG$, такое что $p = f^*Ep_G$. Иными словами, множество главных G-расслоений над B биективно множеству $[B, BG]$ гомотопических классов отображений из B в BG.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что на B задано регулярное клеточное разбиение, т.е. такое, что отображение приклейки границы каждой клетки является гомеоморфизмом на образ. Пусть $p\colon E \to B$ главное G-расслоение. Построим требуемое отображение $f\colon B \to BG$ индукцией по клеткам. Пусть отображение f определено на остове B_{k-1} и e^k — k-мерная клетка. Отображение приклейки $\partial e^k \to B_{k-1}$ изоморфизм, поэтому e^k стягиваема. Значит над ней расслоение E тривиально: $E|_{e^k} \cong e^k \times G$ и в частности оно тривиально над ее границей: $E|_{\partial e^k} \cong \partial e^k \times G$. Из тривиальности над границей следует, что отображение $f|_{\partial e^k}\colon \partial e^k \to BG$ поднимается до отображения $r_1\colon \partial e^k \to EG$. Это отображение можно продолжить до отображения $r_2\colon e^k \to EG$, поскольку EG стягиваемо. Наконец, r_2 можно разнести правым действием группы, и получить отображение $r_3\colon p^{-1}(e_k) \cong e_k \times G \to EG$. Таким образом, мы продолжили отображение f на клетку e_k.

Докажем единственность с точностью до гомотопии. Пусть $f, g\colon B \to BG$, $E = f^*EG = g^*EG$. Пару имеющихся G-эквивариантных отображений $\widetilde{f}, \widetilde{g}\colon E \to EG$ можно продолжить до G-эквивариантного отображения $\widetilde{H}\colon E \times [0,1] \to EG$, такого что $\widetilde{H}_0 = f$, $\widetilde{H}_1 = g$, поскольку EG стягиваемо. Это отображение опускается до гомотопии $H\colon B \times [0,1] \to BG$ между f и g. □

Из утверждения в частности следует, что универсальное расслоение $p_G\colon EG \to BG$ определено однозначно с точностью до гомотопии (в случае, если оно существует, разумеется).

Замечание 4.8. Тривиальное расслоение над B очевидно индуцируется из отображения $B \to BG$, гомотопного отображению в точку.

Пример 4.9. Пусть $G = \mathbb{Z}_2$. Рассмотрим $S^\infty = \lim_{\to n} S^n$, относительно направленной системы $S^0 \hookrightarrow S^1 \hookrightarrow S^2 \hookrightarrow \ldots$ с топологией слабого предела. Пространство S^∞ является CW-комплексом. Имеем $\pi_n(S^\infty) = 0$ (поскольку $\pi_n(S^m) = 0$ при достаточно больших m). Значит, по теореме Уайтхеда S^∞ стягиваемо. Группа $\mathbb{Z}_2$ свободно действует на S^∞ антиподальным отображением. Значит $S^\infty = E\mathbb{Z}_2$, а пространство орбит $S^\infty/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^\infty$ является классифицирующим пространством $B\mathbb{Z}_2$.

В качестве примера использования классификационной теоремы, опишем все главные $\mathbb{Z}_2$-расслоения над S^1. По классификационной теореме это множество эквивалентно $[S^1, \mathbb{R}P^\infty] = \pi_1(\mathbb{R}P^\infty) = \mathbb{Z}_2$. Элементу $0 \in \pi_1(\mathbb{R}P^\infty)$ соответствует тривиальное расслоение $S^1 \times \mathbb{Z}_2 \to S^1$ (это общий феномен, см. замечание 4.8), а нетривиальному элементу $a \in \pi_1(\mathbb{R}P^\infty)$ соответствует двулистное накрытие $S^1 \to S^1$, которое ранее появилось в примере 4.5.

Пример 4.10. Пусть $G = U(1) \cong S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Аналогично предыдущему примеру проверяется, что $BS^1 = \mathbb{C}P^\infty$.

Теперь докажем, что универсальное расслоение и классифицирующее пространство существуют для любой группы G. Для этого опишем явную конструкцию.

Конструкция 4.11 (Конструкция Мильграма–Стинрода). Рассмотрим конфигурационное пространство X, элементы которого суть наборы конечного числа точек на отрезке: $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1$ с приписанными им весами $w_1, \ldots, w_n \in G$. Сделаем некоторые отождествления, а именно:

(1) Разрешается слепить две точки с равными координатами в одну, при этом их веса перемножить в правильном порядке. Иными словами, набор

$$(t_1(w_1), \ldots t_i(w_i), t_{i+1}(w_{i+1}), \ldots, t_n(w_n))$$

отождествляется с набором

$$(t_1(w_1), \ldots t_i(w_i w_{i+1}), \ldots, t_n(w_n)),$$

если $t_i = t_{i+1}$. Также можно выбрасывать точки, заряд которых равен единице группы.

(2) Заряд любой точки в позиции 0 разрешается занулить (т.е. превратить в единицу группы).

Полученное конфигурационное пространство является стягиваемым. Чтобы получить гомотопию в точку, рассмотрим гомотопию, стягивающую отрезок $[0;1]$ в его левый конец: эта гомотопия утаскивает все конфигурации в 0, где заряды зануляются. Можно также показать, что X является CW-комплексом, если таковым является группа G.

Наконец, зададим на X правое действие: скажем, что под действием элемента $g \in G$, конфигурация $(t_1(w_1), \ldots, t_n(w_n))$ переходит в $(t_1(w_1), \ldots, t_n(w_n), 1(g))$ (иными словами действие подкручивает заряд самой правой точки). Это действие, очевидно, свободно. Значит $X = EG$ для группы G. Классифицирующее пространство BG, таким образом, является конфигурационным пространством заряженных точек, в котором зануление происходит не только в левом конце отрезка, но и в правом конце.

Замечание 4.12. Из приведенной конструкции видна функториальность: непрерывному гомоморфизму топологических групп $G \to H$ соответствует отображение классифицирующих пространств $BG \to BH$. Также видно, что $B(G \times H) = BG \times BH$.

Упражнение 4.13. Доказать, что в случае $G = \mathbb{Z}_2$ конструкция Мильграма–Стинрода тоже дает $BG = \mathbb{R}P^\infty$.

Упражнение 4.14. Пусть G — дискретная группа. Доказать, что $BG = K(G,1)$.

Упражнение 4.15. (а) Доказать, что $BT^n \simeq K(\mathbb{Z}^n, 2)$. (б) Доказать, что множество главных T^n-расслоений над CW-комплексом B биективно множеству $H^2(B;\mathbb{Z})$, причем тривиальному расслоению соответствует $0 \in H^2(B;\mathbb{Z})$.

Упражнение 4.16. Опишите классифицирующее пространство свободной группы на n образующих.

Упражнение 4.17. Пусть Σ_n — группа перестановок n элементов. Для произвольного топологического пространства X определим $F_nX = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\}$. Группа Σ_n естественным образом действует на F_nX, переставляя точки из набора. Пусть $C_nX = F_nX/\Sigma_n$ — пространство n-элементных подмножеств пространства X. Пространства F_nX, C_nX называются конфигурационными пространствами (соотв. упорядоченных и неупорядоченных наборов точек). Докажите, что $B\Sigma_n = C_n\mathbb{R}^\infty$.

4.2 Характеристические классы G-расслоений

Определение 4.18. Когомологиями группы G с коэффициентами в кольце R называются когомологии ее классифицирующего пространства $H^*(BG; R)$.

Замечание 4.19. Здесь может возникнуть путаница, поскольку G сама по себе является топологическим пространством, а значит определены когомологии G в привычном смысле. Для алгебраистов, однако, определение, приведенное выше, — первостепенно. Приходится как-то с этим жить.

Зафиксируем пространство F, группу G его гомеоморфизмов, и кольцо коэффициентов R.

Определение 4.20. Характеристическим классом G-расслоений со слоем F называется правило, которое каждому G-расслоению $p\colon E \to B$ со слоем F сопоставляет когомологический класс $c(p) \in H^*(B; R)$ таким образом, что для любого отображения $f\colon B' \to B$ имеем
$$c(f^*p) = f^*(c(p)). \tag{4.2}$$
Здесь слева f^*p — индуцированное расслоение, а справа $f^*\colon H^*(B; R) \to H^*(B'; R)$ — индуцированный гомоморфизм колец когомологий.

Из определения следует, что сумма, умножение на элементы из R, и $\frown$-произведение характеристических классов вновь являются характеристическими классами. Значит все характеристические классы образуют R-алгебру.

Теорема 4.21. *Алгебра характеристических классов G-расслоений (с произвольным, но фиксированным слоем) изоморфна когомологиям группы G, то есть кольцу $H^*(BG; R)$.*

Доказательство. Доказательство почти очевидно. Переходя к ассоциированным главным G-расслоениям, можно считать, что все расслоения главные. Характеристический класс определен для всех расслоений, в том числе и для универсального. Получаем естественный гомоморфизм из кольца всех хар.классов в $H^*(BG; R)$. С другой стороны, любое главное расслоение индуцируется из универсального, а значит, любой элемент $c \in H^*(BG; R)$ можно продолжить до хар.класса, используя формулу (4.2). $\square$

В полную силу теория хар.классов начинает работать для векторных расслоений, которым посвящены следующие разделы.

Упражнение 4.22. Пусть G — дискретная группа. Докажите, что когомологии $H^*(BG;R)$ можно вычислить следующим образом. Пусть $C^n(G;R)$ — модуль всех функций из G^n в R. Зададим гомоморфизм $d^n\colon C^n(G;R)\to C^{n+1}(G;R)$ формулой

$$d^n\phi(g_1,\dots,g_{n+1}) =$$
$$= \phi(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\phi(g_1,\dots,g_{i-1},g_i\cdot g_{i+1},g_{i+2},\dots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1}\phi(g_1,\dots,g_n).$$

Проверьте, что $d^{n+1}\circ d^n = 0$ и $\ker d^n/\operatorname{Im} d_{n-1} \cong H^n(BG;R)$ (Указание: покажите, что на конструкции Мильграма–Стинрода имеется естественная структура клеточного комплекса, и дифференциальный комплекс ее клеточных коцепей совпадает с $C^*(G;R)$).

4.3 Векторные расслоения

Определение 4.23. Локально тривиальное расслоение называется векторным расслоением (вещественным или комплексным), если в его слоях задана структура векторного пространства (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), непрерывно зависящая от точки базы.

Пользуясь введенным ранее формализмом можно дать менее понятное, но более строгое эквивалентное определение

Определение 4.24. G-расслоение $p\colon E\to B$ со слоем F называется вещественным (соотв. ориентированным вещественным, соотв. комплексным) векторным расслоением, если $F=\mathbb{R}^n$, $G=\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (соотв. $F=\mathbb{R}^n$, $G=\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})_+$, соотв. $F=\mathbb{C}^n$, $G=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$) и G действует на F стандартным образом.

Это определение как раз означает, что все слои — векторные пространства, а все функции перехода — линейные операторы. Ориентируемость означает, что функции перехода — линейные операторы с положительным определителем.

Поскольку $\mathbb{C}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$, а $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\subset\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$, любое комплексное векторное расслоение η можно превратить в вещественное векторное расслоение, которое называется его овеществлением и обозначается $\eta_{\mathbb{R}}$.

Утверждение 4.25. *Пусть $\eta\colon E\to B$ — векторное расслоение и $f\colon B'\to B$ непрерывное отображение. Тогда индуцированное расслоение $f^*\eta\colon f^*E\to B'$ является векторным расслоением (того же типа, что и η).*

Любому $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-расслоению $E\to B$ с произвольным слоем F, можно сопоставить n-мерное векторное расслоение с той же базой, покрытием базы, и теми же функциями перехода между элементами покрытия. Оно называется ассоциированным с E векторным расслоением. В зависимости от ситуации бывает удобно работать либо с ассоциированным главным $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-расслоением (у которого слой — $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$), либо с ассоциированным векторным расслоением (у которого слой $\mathbb{R}^n$).

Векторное расслоение с базой B можно рассматривать как набор векторных пространств, параметризованный точками из B. Как следствие, с векторными расслоениями над фиксированной базой можно проделывать все те же операции, что и над обычными векторными пространствами: брать прямые суммы, тензорные произведения, переходить к двойственному пространству, брать внешнюю степень, симметрическую степень, овеществлять, комплексифицировать и т.д.. Все эти операции производятся послойно. Чтобы не определять каждую из них по отдельности, используем следующий трюк.

Конструкция 4.26. Пусть Vect — категория векторных пространств и $\mathcal{F}\colon \operatorname{Vect}^k \times (\operatorname{Vect}^*)^l \to \operatorname{Vect}$ — $(k+l)$-местный непрерывный функтор (ковариантный по k переменным, и контравариантный по l-переменным). Этот функтор есть правило, которое каждому набору векторных пространств $(V_1, \dots, V_k, W_1, \dots, W_l)$ сопоставляет векторное пространство $\mathcal{F}(V_1, \dots, W_l)$, а набору линейных отображений $f_1\colon V_1 \to V_1'$, …, $f_k\colon V_k \to V_k'$, $g_1\colon W_1 \to W_1'$, …, $g_l\colon W_l \to W_l'$ линейное отображение

$$\mathcal{F}(f_1, \dots, g_l)\colon \mathcal{F}(V_1, \dots, V_k, W_1', \dots, W_l') \to \mathcal{F}(V_1', \dots, V_k', W_1, \dots, W_l),$$

удовлетворяющее набору естественных условий (тождественные отображения переходят в тождественные, композиция в композицию, $\mathcal{F}$ непрерывен на гомоморфизмах). Пусть $\eta_1, \dots, \eta_k, \xi_1, \dots, \xi_l$ — векторные расслоения с базой B. Можно считать, что у них есть общее тривиализующее покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$, поскольку всегда можно перейти к общему измельчению. Результатом применения функтора $\mathcal{F}$ к расслоениям $\eta_1, \dots, \eta_k, \xi_1, \dots, \xi_l$ называется расслоение $\mathcal{F}(\eta_1, \dots, \eta_k, \xi_1, \dots, \xi_l)$, слоем которого является векторное пространство $\mathcal{F}(F_{\eta_1}, \dots, F_{\eta_k}, F_{\xi_1}, \dots, F_{\xi_l})$, а функциями перехода — гомоморфизмы

$$\mathcal{F}((\psi_{\eta_1})_{\alpha,\beta}, \dots, (\psi_{\eta_k})_{\alpha,\beta}, (\psi_{\xi_1})_{\alpha,\beta}, \dots, (\psi_{\xi_l})_{\alpha,\beta}).$$

Замечание 4.27. Таким образом, например, определена операция прямой суммы векторных расслоений $\xi_1\colon E_1 \to B$ и $\xi_2\colon E_2 \to B$, которая обозначается $\xi_1 \oplus \xi_2$. Она также называется суммой Уитни векторных расслоений. Эквивалентным образом ее можно определить, как расслоение над B, индуцированное диагональю $\Delta\colon B \to B \times B$ из декартова произведения $\xi_1 \times \xi_2\colon E_1 \times E_2 \to B \times B$.

Предложение 4.28. *В слоях вещественного (соотв. комплексного) векторного расслоения над паракомпактной базой можно задать положительно определенное скалярное (соотв. эрмитово) произведение, непрерывно зависящее от точки базы.*

Доказательство. Пусть $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ — тривиализующее покрытие. Согласно паракомпактности, можно считать, что оно локально конечно. Выберем замкнутые множества $Z_\alpha \subset U_\alpha$, так чтобы их внутренности по прежнему покрывали B и рассмотрим функции $\phi_\alpha\colon B \to [0;1]$, такие что $\phi_\alpha(B \setminus U_\alpha) = 0$, $\phi_\alpha(Z_\alpha) = 1$. На каждом U_α расслоение тривиализуется, поэтому над этим множеством можно выбрать скалярное произведение $g_\alpha\colon p^{-1}(x) \times p^{-1}(x) \to \mathbb{R}$. Наконец, рассмотрим скалярное произведение $\sum_\alpha \phi_\alpha g_\alpha\colon p^{-1}(x) \times p^{-1}(x) \to \mathbb{R}$. Оно корректно определено, поскольку в каждой точке $x \in B$ лишь конечное число слагаемых ненулевые, и оно является скалярным произведением в каждой точке. Комплексный случай аналогичен. $\square$

Поскольку существует скалярное произведение, мы можем считать, что структурная группа вещественных векторных расслоений — это не группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, а ее максимальная компактная подгруппа $O(n)$ (то есть можно считать, что все функции перехода — ортогональные преобразования). Аналогично, можно считать, что структурная группа комплексных векторных расслоений — это не $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, а ее максимальная компактная подгруппа $U(n)$.

Этот же вывод можно было сделать исходя из того, что $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ретрагируется на $O(n)$, а $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ретрагируется на $U(n)$ (посредством ортогонализации Грамма–Шмидта). Действительно, множество расслоений над B, имеющих структурную группу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, совпадает с $[B, B\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})] = [B, BO(n)]$, а значит совпадает с множеством расслоений над B, имеющих структурную группу $O(n)$. В такой ситуации говорят, что структурная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ редуцировалась к $O(n)$. Аналогичным образом, структурная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})_+$ ориентированных расслоений редуцируется к $\mathrm{SO}(n)$.

Замечание 4.29. Заметим, что $S^1 = U(1)$, поэтому одномерные комплексные расслоения над B классифицируются классами отображений $[B, BS^1]$. В примере 4.10 мы выяснили, что $BS^1 = \mathbb{C}P^\infty$. Универсальное векторное расслоение, соответствующее универсальному главному S^1-расслоению $S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ легко описать: над каждой точкой $l \in \mathbb{C}P^\infty$ висит сама прямая $l \subset \mathbb{C}^\infty$. Пусть $t \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ — образующая кольца $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t]$. Любое одномерное комплексное расслоение η над B индуцируется из универсального при помощи однозначно определенного отображения $f\colon B \to \mathbb{C}P^\infty$. Значит определен когомологический класс $c_1(\eta) \overset{\text{def}}{=} f^*(t) \in H^2(B; \mathbb{Z})$, называемый первым классом Черна одномерного векторного расслоения η.

Пример 4.30. Пусть $\gamma_1\colon E \to \mathbb{C}P^n$ — каноническое одномерное расслоение, то есть расслоение, слоем которого над точкой $l \in \mathbb{C}P^n$ является сама прямая $l \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Его первый класс Черна совпадает с образующей кольца когомологий проективного пространства: $c_1(\gamma_1) = t$, где $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t]/(t^{n+1})$.[3]

Далее символами $\underline{\mathbb{R}}^k$, $\underline{\mathbb{C}}^k$ будут обозначаться тривиальные расслоения (над базой, понятной из контекста).

Определение 4.31. Пусть $\eta\colon E \to B$ — векторное расслоение. Сечением расслоения называется непрерывное отображение $s\colon B \to E$, такое что $\eta \circ s = \mathrm{id}_B$. Если значением s в каждой точке является ненулевой вектор слоя, то сечение называется нигде не нулевым. Набор сечений $s_1, \dots, s_k$ называется всюду линейно независимым, если их значения в любой точке линейно независимы.

Упражнение 4.32. n-мерное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда оно допускает n линейно независимых сечений.

Упражнение 4.33. Если на расслоении η есть скалярное произведение, то $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\eta, \underline{\mathbb{R}}) \cong \eta$.

[3] Иногда бывает удобно считать $c_1(\gamma) = -t$. Этот знак является неизбежным злом.

С комплексными расслоениями ситуация чуть сложнее. Пусть η — комплексное расслоение с оператором комплексной структуры $J\colon \eta^{-1}(x) \to \eta^{-1}(x)$, $J^2 = -1$. Символом $\bar\eta$ обозначается сопряженное расслоение, то есть расслоение в котором J заменили на $-J$.

Упражнение 4.34. Если на комплексном расслоении η есть эрмитово произведение, то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\eta, \underline{\mathbb{C}}) \cong \bar\eta$.

Упражнение 4.35. Докажите, что для любого вещественного расслоения η над компактной базой B найдется такое векторное расслоение ξ над B, что $\eta \oplus \xi$ — тривиальное расслоение. Докажите, что требование компактности базы убрать нельзя.

Упражнение 4.36. Докажите, что операция тензорного произведения задает на множестве (классов изоморфизма) одномерных вещественных расслоений над B структуру группы. Если на η есть скалярное произведение, то η является элементом порядка 2 или единицей в этой группе.

Упражнение 4.37. Докажите, что группа из предыдущей задачи изоморфна $H^1(B; \mathbb{Z}_2)$.

Упражнение 4.38. Рассмотрим множество $VB(X)$ всех вещественных (соотв. комплексных) расслоений над заданным X. Операции прямой суммы и тензорного произведения задают на этом множестве структуру полукольца. Соответствующее кольцо Гротендика (т.е. множество формальных разностей $\eta - \xi$, $\eta, \xi \in VB(X)$) называется K-теорией пространства X и обозначается $KO(X)$ (в комплексном случае $K(X)$). Доказать, что $K(\mathrm{pt}) = KO(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм $f^*\colon K(Y) \to K(X)$. Гомотопные отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы.

Упражнение 4.39. Пусть X — компактный CW-комплекс, а $C(X)$ — алгебра непрерывных вещественнозначных функций на X. Пусть η — вещественное векторное расслоение над X. Докажите, что множество сечений $\Gamma(\eta)$ расслоения η обладает структурой модуля над $C(X)$. (а) Докажите, что модуль $\Gamma(\eta)$ свободен в том и только том случае, когда η тривиально. (б) Модуль прямой суммы расслоений равен прямой сумме модулей. (в) Докажите, что для произвольного расслоения η модуль $\Gamma(\eta)$ является проективным (то есть прямым слагаемым в свободном модуле).

4.4 Когомологии линейных групп

Для того, чтобы исследовать характеристические классы векторных расслоений, необходимо вычислить когомологии пространств $BO(n)$ и $BU(n)$, чем мы и займемся. В случае групп $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ и $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ (или их максимальных компактных подгрупп $U(n)$ и $O(n)$) существует классический способ построения универсальных расслоений и классифицирующих пространств.

Определение 4.40. Пусть $V_{m,n}$ (соотв. $V_{m,n}(\mathbb{C})$) — множество ортонормированных n-реперов в m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$ (соотв. $\mathbb{C}^m$). Пространства $V_{m,n}$, $V_{m,n}(\mathbb{C})$ называются многообразиями Штифеля.

Пусть $G_{m,n}$ (соотв. $\widetilde{G}_{m,n}$, соотв. $G_{m,n}(\mathbb{C})$) — множество n-плоскостей в $\mathbb{R}^m$ (соотв. ориентированных n-плоскостей в $\mathbb{R}^m$, соотв. комплексных n-плоскостей в $\mathbb{C}^m$). Пространства $G_{m,n}$, $\widetilde{G}_{m,n}$, $G_{m,n}(\mathbb{C})$ называются многообразиями Грассманна, или грассманианами (неориентированным, ориентированным и комплексным соотв.)

Для удобства мы ограничимся вещественным случаем, хотя комплексный полностью аналогичен.

Группа $O(n)$ свободно действует на $V_{m,n}$ ортогональным преобразованием n-реперов, а пространство орбит этого действия — в точности многообразие Грассманна: $V_{m,n}/O(n) \cong G_{m,n}$.

Пусть $V_{m,n} \hookrightarrow V_{m+1,n}$ отображение многообразий Штифеля, индуцированное вложением $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$. Пусть $V_{\infty,n}$ обозначает прямой предел последовательности отображений

$$V_{m,n} \hookrightarrow V_{m+1,n} \hookrightarrow V_{m+2,n} \hookrightarrow V_{m+3,n} \hookrightarrow \cdots$$

снабженный слабой топологией. Пространство $V_{\infty,n}$ (которое можно понимать как множество n-реперов в $\mathbb{R}^\infty$, попадающих в конечное подпространство $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^\infty$) называется бесконечномерным пространством Штифеля. Аналогичным образом отображения $G_{m,n} \hookrightarrow G_{m+1,n}$, индуцированные вложениями $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ дают бесконечную цепочку вложений

$$G_{m,n} \hookrightarrow G_{m+1,n} \hookrightarrow G_{m+2,n} \hookrightarrow G_{m+3,n} \hookrightarrow \cdots,$$

прямой предел $G_{\infty,n}$ которой называется бесконечным грассманианом.

Группа $O(n)$ свободно действует на $V_{\infty,n}$, и пространство орбит совпадает с $G_{\infty,n}$. Как для многообразий Штифеля, так и для грассманнианов существуют клеточные структуры, которые уважаются включениями, а значит $V_{\infty,n}$ и $G_{\infty,n}$ являются CW-комплексами.

Предложение 4.41. *Пространство $V_{\infty,n}$ стягиваемо.*

Доказательство. Докажем, что $\pi_k(V_{m,n}) = 0$ при $k < m-n$. Отсюда будет следовать, что $\pi_k(V_{\infty,n}) = 0$ для всех k, а значит $V_{\infty,n}$ стягиваемо по теореме Уайтхеда.

Рассмотрим отображение $f\colon V_{m,n} \to S^{m-1}$, которое сопоставляет реперу его первый вектор. Поскольку оставшиеся векторы являются репером в пространстве размерности $m-1$, ортогональном первому вектору, f является локально тривиальным расслоением со слоем $V_{m-1,n-1}$. Равенство $\pi_k(V_{m,n}) = 0$ при $k < m-n$ теперь следует по индукции из точной последовательности гомотопических групп для расслоения $f\colon V_{m,n} \to S^{m-1}$. □

Таким образом $V_{\infty,n} = EO(n)$, $G_{\infty,n} = BO(n)$. Аналогично доказывается, что

$$\widetilde{G}_{\infty,n} = BSO(n) \qquad G_{\infty,n}(\mathbb{C}) = BU(n).$$

Теорема 4.42. *$H^*(G_{\infty,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n]$, $\deg c_i = 2i$ и $H^*(G_{\infty,n};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1,\dots,w_n]$, $\deg w_i = i$.*

Для доказательства нам понадобится теорема Лере–Хирша, представляющая самостоятельный интерес, а также одно простое следствие из нее. Теорема Лере–Хирша является в некотором роде обобщением формулы Кюннета на расслоения.

Теорема 4.43 (Теорема Лере–Хирша)**.** *Пусть $p\colon E \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F, R — кольцо коэффициентов. Допустим, что $H^*(F;R)$ является свободным модулем над R и допустим, что существуют такие классы $\phi_1, \dots, \phi_s \in H^*(E;R)$, что их ограничения $i^*(\phi_1), \dots, i^*(\phi_s)$ дают базис в $H^*(F;R)$ для любого вложения слоя $i\colon F \to E$. Тогда $H^*(E;R)$ является свободным $H^*(B;R)$-модулем с базисом $\phi_1, \dots, \phi_s$. Более точно, отображение*

$$\Phi_B\colon H^*(B;R) \otimes_R H^*(F;R) \to H^*(E;R), \quad \sum_{k,l} b_k \otimes i^*(\phi_l) \mapsto \sum_{k,l} p^*(b_k) \smile \phi_l.$$

является изоморфизмом $H^*(B;R)$-модулей.

Доказательство. Приведем набросок доказательства. При помощи точной последовательности Майера–Вьеториса можно доказать, что, если Φ_{B_1}, Φ_{B_2} и $\Phi_{B_1 \cap B_2}$ — изоморфизмы, то $\Phi_{B_1 \cup B_2}$ — тоже изоморфизм. Таким образом, нужно доказать утверждение для достаточно малого подмножества $B' \subset B$. Но над достаточно малым подмножеством расслоение тривиально, и теорема сводится к формуле Кюннета. $\square$

Пусть $p\colon X \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbb{C}P^k$ и компактной базой B. Пусть $\gamma_{1,X}\colon E \to X$ — каноническое одномерное комплексное расслоение, то есть расслоение, слоем которого над x является соответствующая прямая[4] из слоя $l \in \mathbb{C}P^k$. Напомним (см. замечание 4.29), что $c_1(\gamma_{1,X}) \in H^2(X;\mathbb{Z})$ обозначает первый класс Черна линейного расслоения $\gamma_{1,X}$.

Следствие 4.44. *Пусть $p\colon X \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbb{C}P^k$, $\gamma_{1,X}\colon E \to X$ — каноническое одномерное расслоение над X, и $t = c_1(\gamma_{1,X})$. Тогда $H^*(X)$ есть свободно порожденный модуль над $H^*(B)$ с базисом $1, t, \dots, t^k$.*

Доказательство. Когомологии $\mathbb{C}P^k$ есть свободный $\mathbb{Z}$-модуль. Пусть $i\colon \mathbb{C}P^k \to X$ вложение произвольного слоя. Тогда индуцированное расслоение $i^*\gamma_{1,X}$ есть по определению каноническое расслоение γ_1 над $\mathbb{C}P^k$. Из определения хар.классов следует, что $i^*t = i^*c_1(\gamma_{1,X}) = c_1(i^*\gamma_{1,X})$. Последний класс есть образующая кольца $H^*(\mathbb{C}P^k;\mathbb{Z})$ (см. пример 4.30). Значит $i^*(1), i^*(t), \dots, i^*(t^k)$ свободно порождают $H^*(\mathbb{C}P^k)$ для любого слоя и применима теорема Лере–Хирша. $\square$

[4]строго говоря, в этом абзаце надо рассматривать не произвольные расслоения со слоем $\mathbb{C}P^k$, а проективизации векторных расслоений. В этом случае $\gamma_{1,X}$ определяется строго следующим образом. Пусть p — проективизация векторного расслоения ξ над B. Поскольку B компактно, ξ можно считать подрасслоением в тривиальном $B \times \mathbb{C}^N$. Переходя к проективизации, получаем, что X является подмножеством в $B \times \mathbb{C}P^{N-1}$. Расслоение $\gamma_{1,X}$ — это расслоение, индуцированное из γ_1 над $\mathbb{C}P^{N-1}$ последовательностью отображений $X \hookrightarrow B \times \mathbb{C}P^{N-1} \to \mathbb{C}P^{N-1}$, где первая стрелка — включение, а вторая — проекция на второй сомножитель.

Теперь мы готовы доказать Теорему 4.42.

Доказательство. Докажем только комплексный случай, вещественный аналогичен. Вложение максимального тора $T^n \to U(n)$ (в качестве диагональных матриц) индуцирует отображение $BT^n \to BU(n)$, а значит и гомоморфизм колец $P\colon H^*(BU(n)) \to H^*(BT^n) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$, $\deg t_i = 2$. План: (1) Образ P лежит в симметрических многочленах $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]^{S_n}$. (2) P инъективен. (3) Образ P совпадает с $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]^{S_n}$. Отсюда все следует, поскольку $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$, где σ_i — i-й симметрический многочлен, $\deg \sigma_i = 2i$.

(1) Неформально говоря, это следует из того, что T^n можно непрерывно "прокрутить" внутри $U(n)$, так чтобы его координатные подторы поменялись местами. Рассмотрим случай $n = 2$. Рассмотрим отображение $s\colon T^2 \to T^2$, переставляющее координаты. Индуцированное отображение $Bs^*\colon H^*(BT^2) \to H^*(BT^2)$ переставляет образующие кольца многочленов. Докажем, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^*(BT^2) \arrow[rr, "Bs^*"] \arrow[dr, "P"'] & & H^*(BT^2) \arrow[dl, "P"] \\ & H^*(BU(2)) & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

коммутативна. Заметим, что унитарная матрица $\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$ отличается от $\begin{pmatrix} t_2 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix}$ сопряжением на элемент $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in U(2)$. Пусть $h\colon [0,1] \to U(2)$ — путь в $U(2)$, соединящий 1 с A, а $\widetilde{h}\colon [0;1] \to \mathrm{Aut}(U(2))$, $\widetilde{h}(t)\colon M \to h(t)Mh(t)^{-1}$ — непрервыное семейство внутренних автоморфизмов. Из наличия гомотопии $\widetilde{h}$ между $\mathrm{id}_{U(2)}$ и автоморфизмом сопряжения на A следует, что автоморфизм сопряжения на A индуцирует тождественный гомоморфизм $H^*(BU(2)) \to H^*(BU(2))$. С другой стороны, у подгруппы $T^2 \subset U(2)$ он меняет местами координаты. Отсюда следует коммутативность диаграммы (4.3). Значит образ $H^*(BU(2))$ в $H^*(BT^2)$ состоит из симметрических многочленов. Общий случай $n > 2$ аналогичен (достаточно прокручивать двумерные подторы, а это мы уже умеем).

(2) Пусть $0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant m$. Цепочка вложенных подпространств

$$W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_k \subset \mathbb{C}^m, \qquad \dim W_i = j_i,$$

называется флагом в $\mathbb{C}^m$ типа $(j_1, \dots, j_k)$. Пусть $F_{m;j_1,\dots,j_k}$ — многообразие всех флагов $\mathbb{C}^m$ типа $(j_1, \dots, j_k)$ (упр.: проверьте, что это многообразие). Пусть также $F_{\infty;j_1,\dots,j_k} = \lim_{\to m} F_{m;j_1,\dots,j_k}$ — объединение пространств флагов, снабженное слабой топологией.

Имеем отображение $V_{\infty,n} \to F_{\infty,1,2,\dots,n}$, которое каждому ортонормированному реперу $(e_1, \dots, e_n)$ сопоставляет флаг

$$\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \dots, e_n \rangle.$$

Заметим, что на $V_{\infty,n}$ есть естественное свободное действие тора T^n: $(t_1, \dots, t_n)\cdot(e_1, \dots, e_n) = (t_1e_1, \cdots, t_ne_n)$, причем пространством орбит этого действия как раз является $F_{\infty,1,2,\dots,n}$ (проверьте это!). Таким образом, можно считать, что $F_{\infty,1,2,\dots,n} = BT^n$, поскольку $F_{\infty,1,2,\dots,n}$ есть база главного T^n-расслоения со стягиваемым тотальным пространством $V_{\infty,n}$.

На пространстве флагов $F_{\infty,1,2,\dots,n}$ есть n канонических одномерных расслоений $\xi_1, \dots, \xi_n$. Слоем ξ_i над флагом $W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_k$ является фактор W_i/W_{i-1}. Из конструкций следует, что первые классы Черна $t_i = c_1(\xi_i) \in H^2(F_{\infty,1,2,\dots,n})$ являются образующими кольца $H^*(F_{\infty,1,2,\dots,n}) = H^*(BT^n) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$.

Рассмотрим башню расслоений

$$F_{\infty,1,2,\dots,n} \xrightarrow{p_2} F_{\infty,2,\dots,n} \xrightarrow{p_3} F_{\infty,3,\dots,n} \xrightarrow{p_n} \cdots F_{\infty,n} = G_{\infty,n},$$

где отображение $p_j\colon F_{\infty,j-1,\dots,n} \to F_{\infty,j\dots,n}$ “забывает” наименьшее пространство флага. Расслоение p_j очевидно имеет слой $\mathbb{C}P^{j-1}$ (это все возможные способы выбрать W_{j-1}, $\dim W_{j-1} = j-1$ внутри $W_j \cong \mathbb{C}^j$). Многократно применяя следствие 4.44, получаем цепочку утверждений: $H^*(F_{\infty,1,2,\dots,n})$ есть свободный модуль над $H^*(F_{\infty,2,\dots,n})$ с базисом $1, t_2$; $H^*(F_{\infty,2,3,\dots,n})$ есть свободный модуль над $H^*(F_{\infty,3,\dots,n})$ с базисом $1, t_3, t_3^2$, $\dots$, $H^*(F_{\infty,n-1,n})$ есть свободный модуль над $H^*(F_{\infty,n})$ с базисом $1, t_n, \dots, t_n^{n-1}$. Значит $H^*(F_{\infty,1,2,\dots,n}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ есть свободный модуль над $H^*(G_{\infty,n})$ с базисом $t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$, где $0 \leqslant i_s \leqslant s-1$. В частности, отображение $H^*(G_{\infty,n}) \to H^*(BT^n)$ инъективно[5].

(3) Заметим, что $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ является свободным модулем над $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]^{S_n}$ с базисом $t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$, где $0 \leqslant i_s \leqslant s-1$ (упражнение по алгебре). Значит, $H^*(G_{\infty,n})$ совпадает с $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]^{S_n}$. □

5 Характеристические классы векторных расслоений

5.1 Характеристические классы Черна и Штифеля–Уитни

Далее, $c_i \in H^{2i}(BU(n);\mathbb{Z})$ будет обозначать стандартную образующую кольца $H^*(BU(n);\mathbb{Z})$, соответствующую i-му элементарному симметрическому многочлену. Аналогично, $w_i \in H^i(BO(n);\mathbb{Z}_2)$ обозначает стандартную образующую кольца $H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2)$, соответствующую i-му элементарному симметрическому многочлену.

Определение 5.1. Пусть $\eta\colon E \to B$ — n-мерное комплексное расслоение и пусть η классифицируется отображением $f\colon B \to BU(n)$. Элемент $c_i(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} f^*(c_i) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$ называется i-м классом Черна расслоения η. Формальная сумма $c(\eta) = 1 + c_1(\eta) + \cdots + c_n(\eta) \in \bigoplus_i H^{2i}(B;\mathbb{Z})$ называется полным классом Черна.

Определение 5.2. Пусть $\eta\colon E \to B$ — n-мерное вещественное расслоение и пусть η классифицируется отображением $f\colon B \to BO(n)$. Элемент $w_i(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} f^*(w_i) \in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$

[5]В этом пункте мы не очень аккуратно относимся к символам t_i: в следствии 4.44 t было классом Черна канонического расслоения, а у нас расслоения вообще-то немного другие. Додумайте пропущенные детали самостоятельно.

называется i-м классом Штифеля–Уитни расслоения η. Формальная сумма $w(\eta) = 1 + w_1(\eta) + \dots + w_n(\eta) \in \bigoplus_i H^i(B;\mathbb{Z}_2)$ называется полным классом Штифеля–Уитни.

Из теорем 4.21 и 4.42 следует, что любой хар.класс комплексных расслоений (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$) есть многочлен от классов Черна, а любой хар.класс вещественных расслоений (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) есть многочлен от классов Штифеля–Уитни.

Пусть $\eta\colon E \to B$ — n-мерное комплексная расслоение. Рассмотрим $t_1(\eta), \dots, t_n(\eta)$ — формальные символы, такие что $\sigma_i(t_1(\eta), \dots, t_n(\eta)) = c_i(\eta)$, где σ_i — i-й элементарный симметрический многочлен. Сами по себе $t_i(\eta)$ нигде не лежат, это просто символы. Однако, произвольный симметрический многочлен от этих элементов является корректно определенным когомологическим классом в B. Действительно, симметрический многочлен выражается через элементарные симметрические единственным образом, а значит в это выражение можно подставить классы Черна и подсчитать значение многочлена на них[6]. Символы $t_1(\eta), \dots, t_n(\eta)$ называются корнями Черна (или виртуальными классами Черна. Имеем тождество

$$c(\eta) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t_i(\eta)).$$

Аналогично определяются корни Штифеля–Уитни (виртуальные классы Штифеля–Уитни).

Предложение 5.3. *Пусть $\xi \oplus \eta$ — прямая сумма комплексных расслоений над базой B. Тогда $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta) \in H^{2*}(B;\mathbb{Z})$. Аналогично, для вещественных расслоений имеем $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta) \in H^*(B;\mathbb{Z}_2)$.*

Доказательство. Пусть n, k — размерности ξ и η соотв. Пусть $f\colon B \to BU(n)$ классифицирует ξ, а $g\colon B \to BU(k)$ классифицирует η. Из определения (см. замечание 4.27) следует, что расслоение $\xi \oplus \eta$ классифицируется композицией $B \xrightarrow{\Delta} B \times B \xrightarrow{f \times g} BU(n) \times BU(k) \xrightarrow{\imath} BU(n+k)$, где последнее отображение индуцировано естественным отображением $U(n) \times U(k) \to U(n+k)$, которое матрицам C, D сопоставляет блочную матрицу с блоками C, D. Пусть c_i — i-ая стандартная образующая кольца $H^*(BU(n)) \subset H^*(BU(n) \times BU(k))$, c'_i — i-ая стандартная образующая кольца $H^*(BU(k)) \subset H^*(BU(n) \times BU(k))$, а d_i — i-ая стандартная образующая кольца $H^*(BU(n+k))$. Из соображений универсальности достаточно доказать, что в кольце $H^*(BU(n) \times BU(k))$ выполнено соотношение

$$\sum_i \imath^* d_i = (\sum_i c_i)(\sum_i c'_i). \tag{5.1}$$

[6]На четномерных когомологиях $\smile$-произведение коммутативно, поэтому корректно определено значения многочленов от четномерных когомологических классов. В вещественном случае тоже нет проблемы: $\smile$-произведение когомологий над $\mathbb{Z}_2$ коммутативно во всех размерностях. В этих случаях мы не пишем значок $\smile$ — и так понятно, о каком умножении идет речь

Имеем коммутативные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
T^n \times T^k \arrow[r, equal] \arrow[d] & T^{n+k} \arrow[d] \\
U(n) \times U(k) \arrow[r] & U(n+k)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^*(BU(n+k)) \arrow[r] \arrow[d] & H^*(BU(n) \times BU(k)) \arrow[d] \\
H^*(BT^{n+k}) \arrow[r, equal] & H^*(BT^n \times BT^k)
\end{tikzcd}
$$

Пусть $t_1, \dots, t_n$ — образующие кольца $H^*(BT^n)$, а $t'_1, \dots, t'_k$ — образующие кольца $H^*(BT^k)$. Таким образом, c_i есть i-ая элементарная симметрическая функция от t_i, c'_i есть i-ая элементарная симметрическая функция от t'_i, а d_i есть i-ая элементарная симметрическая функция от объединенного набора t_i, t'_i. Имеем $\sum_i c_i = \prod_{i=1}^n (1 + t_i)$, $\sum_i c'_i = \prod_{i=1}^k (1 + t'_i)$, а $\sum_i i^* d_i = \prod_{i=1}^n (1 + t_i) \prod_{i=1}^k (1 + t'_i)$. Тождество (5.1) становится очевидным. □

Замечание 5.4. Более эзотерическая формулировка Предложения 5.3 имеет такой вид: корни Черна расслоения $\xi \oplus \eta$ есть объединение корней Черна расслоения ξ и корней Черна расслоения η.

Следствие 5.5. *Пусть расслоение η расщепляется в прямую сумму одномерных $\eta = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n$. Тогда $c(\eta) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i)$, где $t_i = c_1(\xi_i)$.*

Иными словами, для расщепимых расслоений корни Черна (соотв. Штифеля–Уитни) являются корректно определенными элементами группы $H^2(B; \mathbb{Z})$ (соотв. $H^1(B; \mathbb{Z}_2)$). Это просто первые классы Черна или Штифеля–Уитни одномерных слагаемых.

Упражнение 5.6. (а) Пусть $S\mathbb{Z}_2^n = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n \mid \sum \epsilon_i = 0 \mod 2\}$. Рассмотрев коммутативную диаграмму групп (слева) и соответствующих гомоморфизмов когомологий классифицирующих пространств (справа)

$$
\begin{tikzcd}
S\mathbb{Z}_2^n \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{SO}(n) \arrow[d, hook] \\
\mathbb{Z}_2^n \arrow[r, hook] & O(n)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^*(B\mathbb{Z}_2^n; \mathbb{Z}_2) \arrow[d] \\
H^*(B\,\mathrm{SO}(n); \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "="] & H^*(BS\mathbb{Z}_2^n; \mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}
$$

докажите, что $H^*(B\,\mathrm{SO}(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, \dots, w_n]$, $\deg w_i = i$, а гомоморфизм $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_n] \to H^*(B\,\mathrm{SO}(n); \mathbb{Z}_2)$ посылает w_1 в 0, а остальные образующие тождественно.

(б) Докажите, что вещественное векторное расслоение η ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\eta) = 0$.

Упражнение 5.7. Пусть $\mathrm{SU}(n)$ — группа унитарных матриц с определителем 1. Доказать, что структурную группу комплексного расслоения ξ можно редуцировать к $\mathrm{SU}(n)$ тогда и только тогда, когда $c_1(\xi) = 0$.

5.2 Первые свойства

Переключимся для разнообразия на классы Штифеля–Уитни (для Черна все аналогично).

Предложение 5.8. *1. Если вещественное расслоение $\xi\colon E \to B$ тривиально, то $w(B) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z}_2)$.*

2. Если η произвольно, а ξ тривиально, то $w(\eta \oplus \xi) = w(\eta)$.

3. Если n-мерное расслоение η допускает k линейно независимых сечений, то $w_i(\eta) = 0$ при $i > n - k$.

Доказательство. Первые два пункта очевидны из уже доказанного. Докажем (3). Набор k линейно независимых сечений $s_1, \ldots, s_k$ задает векторное подрасслоение ξ, слоем которого над $x \in B$ является линейная оболочка $\langle s_1(x), \ldots, s_k(x)\rangle$. Сечения $s_1, \ldots, s_k$ задают тривиализацию ξ, поэтому $w(\xi) = 1$. Пусть $\xi^\perp$ ортогональное дополнение к ξ в η (оно определено, потому что в слоях η можно ввести скалярное произведение, непрерывно зависящее от точек базы, см. Предложение 4.28), $\dim \xi^\perp = n - k$. Тогда $\eta = \xi \oplus \xi^\perp$, $w(\eta) = w(\xi^\perp)$. Но $w_i(\xi^\perp) = 0$ при $i > n - k$ по соображениям размерности. □

Замечание 5.9. Допустим, что сумма расслоений ξ и η является тривиальным расслоением. Тогда $w(\xi)w(\eta) = 1$ в $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$. Это можно расписать в виде цепочки тождеств

$$
\begin{gathered}
w_1(\xi) + w_1(\eta) = 0, \\
w_2(\xi) + w_1(\xi)w_1(\eta) + w_2(\eta) = 0, \\
\ldots \\
w_n(\xi) + w_{n-1}(\xi)w_1(\eta) + \ldots + w_n(\eta) = 0, \ldots
\end{gathered}
$$

Зная все $w_i(\xi)$, можно рекуррентно вычислить $w_i(\eta)$ однозначным образом. В связи с этим, мы будем говорить, что $w(\eta)$ является формально обратным к $w(\xi)$, и писать $w(\eta) = w(\xi)^{-1}$.

5.3 Касательные и нормальные расслоения

Ключевой пример векторного расслоения — касательное расслоение гладкого многообразия. Неформально говоря, касательное расслоение — это расслоение над гладким многообразием M, слоем которого над точкой $x \in M$ является касательное пространство T_xM.

Определение 5.10. Пусть M — гладкое многообразие, $M = \bigcup U_\alpha$, $\phi_\alpha\colon M \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — гладкий атлас, и $\psi_{\alpha,\beta}\colon V_{\alpha,\beta} \xrightarrow{\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}} V_{\beta,\alpha}$ — функции склейки. Рассмотрим векторное расслоение TM со слоем $\mathbb{R}^n$, базой M, тривиализующим атласом $\{U_\alpha\}$, и функциями перехода $\widetilde{\psi}_{\alpha,\beta,x} = \mathrm{Jac}_x\, \psi_{\alpha,\beta} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Векторное расслоение TM называется касательным расслоением многообразия M.

Упражнение 5.11. Гладкое многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда TM — ориентируемое векторное расслоение.

Упражнение 5.12. Доказать, что тотальное пространство касательного расслоения является гладким многообразием размерности $2n$.

Определение 5.13. Многообразие M называется почти комплексным, если TM — комплексное расслоение. Эквивалентно: M почти комплексное, если в касательном пространстве к каждой точке можно ввести оператор $J_x\colon T_xM \to T_xM$, $J_x^2 = -\operatorname{id}_{T_xM}$, непрерывно[7] зависящий от x.

Определение 5.14. Многообразие M называется параллелизуемым, если его касательное расслоение тривиально. Эквивалентно, M — параллелизуемо, если в TM существует $n = \dim M$ линейно независимых сечений.

Если $N \subset M$ — гладкое подмногообразие, то над N определены два векторных расслоения: $TN \subset TM|_N$, где $TM|_N$ — ограничение TM на N. Ортогональное дополнение к TN в $TM|_N$ (относительно некоторого скалярного произведения) называется нормальным расслоением подмногообразия N в M и обозначается $\nu_{N\subset M}$.[8]

Нормальное расслоение над N можно определить аналогичным образом для произвольного погружения $f\colon N \to M$.

В дальнейшем вместо $w(TM)$ и $c(TM)$ мы будем писать просто $w(M)$, $c(M)$.

5.4 Примеры вычислений и приложения

Упражнение 5.15. $c_k(\bar\eta) = (-1)^k c_k(\eta)$.

Проективные пространства Пусть $\gamma_1\colon E \to \mathbb{R}P^n$ — каноническое одномерное расслоение над $\mathbb{R}P^k$. Как уже отмечалось в примере 4.30, $w_1(\eta) \in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{k+1})$ есть образующая t кольца когомологий. По построению γ_1 есть подрасслоение в тривиальном расслоении $\underline{\mathbb{R}}^{n+1}$, состоящее из всех таких пар (l, x), где l — прямая в $\mathbb{R}^{n+1}$, а $x \in l$. Пусть $\gamma_1^\perp$ — ортогональное дополнение до γ_1 в $\mathbb{R}^{n+1}$. Имеем,

$$w(\gamma_1^\perp) = w(\gamma_1)^{-1} = (1+t)^{-1} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n.$$

Таким образом $\gamma_1^\perp$ дает пример расслоения, у которого все классы Штифеля–Уитни ненулевые.

Лемма 5.16. $T(\mathbb{R}P^n) \cong \operatorname{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^\perp)$.

Доказательство. Касательное расслоение к проективному пространству можно отождествить с множеством точек $(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, $\|x\| = 1$, $v \in \langle x\rangle^\perp$ с точностью до отождествления $(x, v) \sim (-x, -v)$. Каждому такому классу можно сопоставить функционал $l\colon \langle x\rangle \to \langle x\rangle^\perp$, принимающий на x значение v. И наоборот. $\square$

[7] а чаще даже предполагается, что гладко

[8] Независимость от выбора скалярного произведения следует из утверждения $\nu_{N\subset M} \cong (TM|_N)/TN$. Справа стоит инвариантный объект

Предложение 5.17.
$$\underbrace{\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_1}_{n+1} \cong T(\mathbb{R}P^n) \oplus \underline{\mathbb{R}}$$

Доказательство. Имеем $\mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1) \cong \underline{\mathbb{R}}$, поскольку оно одномерно, и в нем существует нигде не нулевое сечение, состоящее из тождественных операторов. Тогда

$$T(\mathbb{R}P^n) \oplus \underline{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^{\perp}) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1) \cong \\ \cong \mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^{\perp} \oplus \gamma_1) \cong \mathrm{Hom}(\gamma_1, \mathbb{R}^{n+1}) \cong \bigoplus_{n+1} \mathrm{Hom}(\gamma_1, \mathbb{R}) \cong \bigoplus_{n+1} \gamma_1, \quad (5.2)$$

где последнее следует из упражнения 4.33. □

Следствие 5.18. $w(\mathbb{R}P^n) = (1+t)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} t^i \in H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$.

Упражнение 5.19. Описать классы Черна комплексного многобразия $\mathbb{C}P^n$.

Приведем некоторые интересные следствия.

Параллелизуемость Обнуление классов Штифеля–Уитни для проективных многообразий эквивалентно обнулению биномиальных коэффициентов по модулю 2. Для вычислений полезна

Теорема 5.20 (Теорема Люка́). *Пусть p — простое число, $a, b > 0$, $\overline{\ldots a_2 a_1 a_0}$ — p-ичная запись a, $\overline{\ldots b_2 b_1 b_0}$ — p-ичная запись b. Тогда $\binom{a}{b} \equiv \prod_i \binom{a_i}{b_i} \mod p$.*

Доказательство — хорошее упражнение по алгебре над полем $\mathbb{F}_p$. В случае $p = 2$ имеем $\binom{1}{1} = \binom{1}{0} = \binom{0}{0} = 1$ и $\binom{0}{1} = 0$. Поэтому $\binom{a}{b} \equiv 1 \mod 2$ в том и только том случае, когда двоичная запись a поциферно мажорирует двоичную запись b.[9]

Теорема 5.21 (Теорема Штифеля). $w(\mathbb{R}P^n) = 1$ *в том и только том случае, когда $n+1$ является степенью двойки.*

Доказательство. Упражнение. □

Как следствие, среди всех $\mathbb{R}P^n$ параллелизуемыми могут быть (но еще не факт, что будут!) только $\mathbb{R}P^1$,$\mathbb{R}P^3$,$\mathbb{R}P^7$,$\mathbb{R}P^{15}$, ...

Алгебры с делением У проделанного вычисления есть приложение из казалось бы совсем далекой области. В алгебре рассматривают вещественные числа, комплексные числа (они задаются парой вещественных), кватернионы (задаются четверкой вещественных), октавы Кэли (задаются восьмеркой вещественных). Гамильтон (который в итоге придумал кватернионы) долго пытался изобрести теорию “трехмерных” чисел, но как-то оно не получалось. На то есть причина.

[9] поциферное мажорирование двоичных записей возникает также в оценке выигрышных стратегий игры Ним. Интересно было бы найти взаимосвязь игры Ним с проективными пространствами

Теорема 5.22 (Теорема Штифеля)**.** *Допустим, что на $\mathbb{R}^n$ существует билинейная операция умножения $p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ без делителей нуля. Тогда $\mathbb{R}P^{n-1}$ параллелизуемо и, следовательно, $n = 2^k$.*

Доказательство. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — базис $\mathbb{R}^n$. Поскольку нет делителей нуля, отображения $r_i\colon y \mapsto p(y, b_i)$ задают линейные изоморфизмы $\mathbb{R}^n$ на себя. Зададим отображения $v_i = r_i \circ r_1^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Таким образом, $v_1(x) = x$ и при $x \neq 0$ векторы $v_1(x), \ldots, v_n(x)$ линейно независимы. Отображения $v_2, \ldots, v_n$ задают $n-1$ линейно независимых сечений векторного расслоения $\mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^\perp)$. Действительно, каждой прямой $l \subset \mathbb{R}^n$ сопоставим отображение $\tilde{v}_i\colon l \to l^\perp$ следующим образом: отобразим вектор $x \in l$ в ортогональную проекцию $v_i(x)$ на $l^\perp$. Имеем $\tilde{v}_1(x) = 0$, а $\tilde{v}_2(x), \ldots, \tilde{v}_n(x)$ образуют базис $l^\perp$. Таким образом $T(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^\perp)$ является тривиальным расслоением. □

Поскольку существуют комплексные числа, кватернионы и октавы, из теоремы следует, что $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{R}P^3$ и $\mathbb{R}P^7$ действительно параллелизуемы. С другой стороны, уже более сложным способом доказывается, что $\mathbb{R}P^{2^k-1}$ не параллелизуемо при $k > 3$. Значит, алгебры с делением над $\mathbb{R}$ исчерпываются списком $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$

Погружения Приведем вначале классическую теорему Уитни.

Теорема 5.23 (Сильная теорема Уитни)**.** *Любое замкнутое гладкое многообразие M размерности n можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

Доказательство. Докажем слабую версию: существует погружение в $\mathbb{R}^{2n}$ и вложение в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Вначале покажем, что существует вложение в $\mathbb{R}^N$ для какого-то N. Пусть $U_\alpha, \alpha \in A$ — гладкий атлас. Из компактности можно считать, что A конечно. Пусть $\phi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ — координатные отображения, а $\psi_\alpha\colon M \to \mathbb{R}$, $\alpha \in A$ — разбиение единицы, подчиненное атласу U_α, т.е. набор гладких функций, удовлетворяющий условиям $\psi_\alpha|_{M \setminus U_\alpha} = 0$, $\sum_\alpha \psi_\alpha(x) = 1$, $\forall x \in M$. Пусть $\overline{\phi}_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\overline{\phi}_\alpha(x) = (\phi_\alpha(x), 1)$. Рассмотрим отображение $F\colon M \to \mathbb{R}^{(n+1)|A|}$, заданное формулой $F(x) = (\psi_1\phi_1, \ldots, \psi_{|A|}\phi_{|A|})$. Простая проверка показывает, что F — гладкое вложение.

Для прямой $l \in \mathbb{R}^N$ обозначим через pr_l отображение проекции $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1} = \mathbb{R}^N/l$. Пусть $\mathrm{Bad}(F)$ (соотв. $\mathrm{Bad}(F)'$) обозначает множество всех таких прямых $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$, для которых композиция $M \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathrm{pr}_l} \mathbb{R}^{N-1}$ не является вложением (соотв. погружением). Проверяется, что $\dim \mathrm{Bad}(F) = 2n-1$, и $\dim \mathrm{Bad}(F)' = 2n$. Значит до тех пор пока $N - 1 > 2n - 1$ (соотв. $N - 1 > 2n$), можно выбрать направление проектирования так чтобы спроектированное отображение было снова погружением (соотв. вложением). Детали см. например в [6].

Чтобы получить погружение в $\mathbb{R}^{2n-1}$ и вложение в $\mathbb{R}^{2n}$ нужны более тонкие рассуждения. □

Упражнение 5.24. Доказать, что T^n можно вложить в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Возникает вопрос: насколько точна оценка размерности погружения, нельзя ли ее улучшить дальше? Классы Штифеля–Уитни дают препятствие к погружаемости.

Предложение 5.25. *Если многообразие $\mathbb{R}P^{2^k}$ погружается в $\mathbb{R}^{2^k+s}$, то $s \geqslant 2^k - 1$.*

Доказательство. Пусть ν — нормальное расслоение погружения $\mathbb{R}P^n$ в $\mathbb{R}^{n+s}$. Тогда $w(\nu) = w(T(\mathbb{R}P^n))^{-1} = (1+t)^{-(n+1)} = \sum_j \binom{j+n}{n} t^j$, согласно замечанию 5.9, следствию 5.18 и стандартному разложению функции $(1+t)^{-(n+1)}$ в ряд Тейлора. Подставляя $n = 2^k$, получаем

$$w_{2^k-1}(\nu) = \binom{2^{k+1}-1}{2^k} = 1 \mod 2,$$

поскольку двоичная запись числа $2^{k+1} - 1 = \overline{1\dots1}$ поциферно мажорирует двоичную запись числа $2^k = \overline{10\dots0}$. Поскольку нормальное расслоение имеет ненулевой класс $w_{2^k-1}(\nu)$, оно должно быть как минимум (2^k-1)-мерным. $\square$

Глобальная реализуемость многообразия системой функций По теореме о неявной функции, любое подмногообразие M, $\dim M = m$ в $\mathbb{R}^n$ *локально* задается как множество общих нулей системы $n-m$ гладких функций $f_1, \dots, f_{n-m}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, градиенты которых линейно независимы в точках многообразия.

Интересный вопрос: можно ли любое многообразие задать как множество нулей *глобально* определенных функций? Например, окружность можно так задать: $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Предложение 5.26. *Пусть $f_1, \dots, f_{n-m}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ гладкие функции, такие что* $\operatorname{grad}_x f_1$, …, $\operatorname{grad}_x f_{n-m}$ *линейно независимы для любой точки x, такой что $f_1(x) = \dots = f_{n-m}(x) = 0$. Тогда $w(M) = 1$, где $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = \dots = f_{n-m}(x) = 0\}$ — многообразие общих нулей.*

Доказательство. Градиенты функций задают $m-n$ линейно независимых сечений нормального расслоения $\nu_{M\subset\mathbb{R}^n}$. Значит нормальное расслоение тривиально и $w(\nu_{M\subset\mathbb{R}^n}) = 1$. Значит $w(M) = w(\nu_{M\subset\mathbb{R}^n})^{-1} = 1$. $\square$

У нас уже есть примеры многообразий с нетривиальными классами Штифеля–Уитни, например $\mathbb{R}P^n$ при $n \neq 2^k - 1$. Как видно, эти многообразия невозможно определить как множество нулей глобально заданных функций.

Теорема Борсука–Улама Классифицируем все главные $\mathbb{Z}_2$-расслоения над B. По классификационной теореме это множество совпадает с $[B, \mathbb{R}P^\infty]$. С другой стороны $\mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1)$, а значит $[B, \mathbb{R}P^\infty] = [B, K(\mathbb{Z}_2,1)] = H^1(B;\mathbb{Z}_2)$. Применяя это к $B = \mathbb{R}P^n$, получаем, что над $\mathbb{R}P^n$ существует два главных $\mathbb{Z}_2$-расслоения. Очевидно, что это “каноническое” накрытие $p_n\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ и тривиальное $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$. Их можно отличить глядя лишь на тотальные пространства.

Предложение 5.27. *Пусть $f\colon S^n \to S^m$ непрерывное отображение, такое что $f(-x) = -f(x)$. Тогда $n \leqslant m$.*

Доказательство. Действие $\mathbb{Z}_2$ на сфере S^m свободно, а значит можно рассматривать сферу как тотальное пространство главного $\mathbb{Z}_2$-расслоения p_m над $\mathbb{R}P^m$. Непрерывное отображение $f\colon S^n \to S^m$, переводящее антиподальные точки в антиподальные, индуцирует отображение $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m$. Индуцированное расслоение $\widetilde{f}^* p_m$ совпадает с p_n (поскольку у них совпадают тотальные пространства, см. рассуждение выше). Значит класс $w_1(p_m) = t \in H^1(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)$ индуцированным отображением когомологий $\widetilde{f}^*\colon H^1(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ переводится в класс $w_1(p_n) = t \in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$. Но в когомологиях $H^*(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)$ имеем $t^{m+1} = 0$. Значит $t^{m+1} = 0$ в кольце $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{n+1})$. Следовательно $n \leqslant m$. □

Теорема 5.28 (Теорема Борсука–Улама). *Пусть $h\colon S^n \to \mathbb{R}^n$. Тогда найдется точка $x \in S^n$, такая что $h(x) = h(-x)$.*

Доказательство. Допустим, что $h(x) \neq h(-x)$ при всех $x \in S^n$. Зададим непрерывное отображение $f\colon S^n \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ по формуле $f(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{\|h(x)-h(-x)\|}$. Имеем $f(-x) = -f(x)$. Противоречие с предыдущей теоремой. □

Из теоремы Борсука–Улама выводится масса красивых комбинаторных результатов, которые легли в основу топологической комбинаторики. Приведем пример долго стоявшей гипотезы, которая решилась при помощи теоремы Борсука–Улама.

Теорема 5.29 (Ранее гипотеза Кнезера, ныне теорема Ловаша). *Пусть $n \geqslant 2k+2$ и $K_{n,k}$ — граф, вершинами которого являются k подмножества в n-элементном множестве, а ребрами — пары непересекающихся подмножеств. Хроматическое число графа $K_{n,k}$ равно $n-2k+2$.*

Самое короткое доказательство (опирающееся, впрочем, еще и на нетривиальную теорему Гейла из выпуклой геометрии) см. в [10].

Числа Штифеля–Уитни Пусть $w_i(M) \in H^i(M;\mathbb{Z}_2)$ — классы Штифеля–Уитни n-мерного замкнутого гладкого многообразия M. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — неотрицательные целые числа, такие что $k_1+2k_2+\ldots+nk_n = n$. Рассмотрим класс $w_1(M)^{k_1} w_2(M)^{k_2} \cdots w_n(M)^{k_n} \in H^n(M;\mathbb{Z}_2)$. Его спаривание с $[M] \in H_n(M;\mathbb{Z}_2)$ называется характеристическим числом Штифеля–Уитни, соответствующим последовательности $k_1, k_2, \ldots, k_n$ (очевидно, это число лежит в $\mathbb{Z}_2$).

Упражнение 5.30. Описать числа Штифеля–Уитни для $\mathbb{R}P^n$.

Теорема 5.31 (Теорема Понтрягина). *Пусть B — гладкое $(n+1)$-мерное многообразие с краем $M = \partial B$. Тогда все числа Штифеля–Уитни многообразия M равны нулю.*

Доказательство. Пусть $[B] \in H_{n+1}(B, M)$, $[M] \in H_n(M)$ — фундаментальные классы. Связывающий гомоморфизм $\partial\colon H_{n+1}(B, M) \to H_n(M)$ переводит $[B]$ в $[M]$. Для любого класса $v \in H^n(M)$ справедливо $\langle v, [M]\rangle = \langle v, \partial[B]\rangle = \langle \delta v, [B]\rangle$, где $\delta\colon H^n(M) \to H^{n+1}(B, M)$ — связывающий гомоморфизм в когомологиях.

Имеем $TB|_M = TM \oplus \epsilon$, где ϵ — тривиальное нормальное расслоение к краю (тривиальность следует из того факта, что можно выбрать нормальный вектор в каждой точке, смотрящий внутрь многообразия B). Поэтому хар.классы расслоений $TB|_M$ и TM совпадают. Из отрезка точной последовательности

$$H^n(B) \xrightarrow{i^*} H^n(M) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(B, M)$$

имеем $\delta(w_1(M)^{k_1} \cdots w_n(M)^{k_n}) = 0$ и следовательно

$$\langle w_1(M)^{k_1} \cdots w_n(M)^{k_n}, [M] \rangle = \langle \delta w_1(M)^{k_1} \cdots w_n(M)^{k_n}, [B] \rangle = 0,$$

что и требовалось. $\square$

Теорема 5.32 (Теорема Тома)**.** *Пусть все числа Штифеля–Уитни многообразия M равны нулю. Тогда M является границей некоторого многообразия.*

5.5 Когомологии конечномерных грассманианов

Вернемся к комплексному случаю и хар.классам Черна. Ранее мы посчитали когомологии бесконечномерных грассманианов: $H^*(G_{\infty,n}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n], \deg c_i = 2i$. Теперь опишем когомологии конечномерных грассманианов.

Определим алгебру

$$R_{l,k} = \frac{\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_l, d_1, \ldots, d_k]}{\left(\sum_{i+j=s} c_i d_j, s = 1, \ldots, l+k\right)}, \quad \deg c_i = \deg d_i = 2i,$$

где в записи соотношений справа мы полагаем $c_0 = d_0 = 1$, $c_i = 0$ при $i > l$, $d_i = 0$ при $i > k$.

Упражнение 5.33. Докажите, что $R_{l,k}$ — конечномерное векторное пространство.

Напомним, что γ_n — каноническое расслоение над грассманианом, то есть расслоение вида $\{(\Pi, v) \in G_{m,n} \times \mathbb{C}^m \mid v \in \Pi\}$. Пусть $\gamma_n^\perp$ — ортогональное к нему, то есть $\{(\Pi, v) \in G_{m,n} \times \mathbb{C}^m \mid v \in \Pi^\perp\}$.

Теорема 5.34. $H^*(G_{m,n}; \mathbb{Z}) \cong R_{n,m-n}$

Вначале введем классическую клеточную структуру на грассманиане.

Конструкция 5.35. Фиксируем флаг координатных подпространств

$$\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{C}^{m-1} \subset \mathbb{C}^m.$$

Для подпространства $\Pi \in G_{m,n}$ рассмотрим набор чисел $s_1, \ldots, s_n$, где

$$s_i = \min\{k \in \{1, \ldots, m\} \mid \dim(\Pi \cap \mathbb{C}^k) = i\},$$

называемый символом подпространства Π и обозначаемый $\sigma(\Pi)$. Символ обладает очевидным свойством $1 \leqslant s_1 < \cdots < s_n \leqslant m$. Пусть σ — произвольный символ. Рассмотрим $U_\sigma = \{\Pi \in G_{m,n} \mid \sigma(\Pi) = \sigma\}$.

Упражнение 5.36. $U_\sigma \cong \mathbb{C}^{|\sigma|}$, где $|\sigma| = \sum_{i=1}^n (s_i - i)$.

Упражнение 5.37. Граница множества U_σ содержится в объединении U_τ с $\tau < \sigma$ (мы говорим, что $\tau \leqslant \sigma$, если $t_i \leqslant s_i$ для всех i).

Замыкание $\overline{U}_\sigma$ называется клеткой Шуберта. Упражнения показывают, что клетки Шуберта задают на $G_{m,n}$ структуру клеточного комплекса. Заметим, что все клетки четномерны — в этом случае говорят, что клеточная структура совершенна. В комплексе клеточных цепей (или коцепей) все дифференциалы бьют либо в нечетные размерности, либо из нечетных размерностей, а значит в случае совершенной клеточной структуры все дифференциалы нулевые, и мы имеем $H^{2j}(G_{m,n}; \mathbb{Z}) \cong \mathcal{C}^{2j}(G_{m,n}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{d(m,n)}$, где $d(m,n)$ — число клеток размерности $2j$, то есть число символов σ, таких что $|\sigma| = j$.

Далее заметим, что вложение $G_{m,n} \to G_{m+1,n}$ отображает клетку $\overline{U}_\sigma$ первого грассманиана в одноименную клетку второго грассманиана. Поскольку шубертовы структуры согласованны, они в пределе задают клеточную структуру на бесконечномерном грассманиане $G_{\infty,n}$.

Лемма 5.38. *Отображение вложения* $\imath\colon G_{m,n} \to G_{\infty,n}$ *индуцирует эпиморфное отображение в когомологиях* $H^*(G_{\infty,n}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n] \to H^*(G_{m,n}; \mathbb{Z})$, *которое отправляет стандартную образующую* c_i *в* i*-й класс Черна канонического расслоения:* $\imath^*(c_i) = c_i(\gamma_n)$.

Доказательство. Эпиморфность следует из того, что любая клетка Шуберта пространства $G_{m,n}$ является клеткой Шуберта пространства $G_{\infty,n}$ и обе клеточных структуры совершенны. Утверждение про класс Черна очевидно, поскольку каноническое расслоение γ_n классифицируется вложением $\imath\colon G_{m,n} \to G_{\infty,n}$. □

Рассмотрим коммутативную диаграмму алгебр

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n] \arrow[rr, "\imath^*"] \arrow[dr, "f"'] & & H^*(G_{m,n}; \mathbb{Z}) \\ & R_{n,m-n} \cong \dfrac{\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_{m-n}]}{\left(\sum_{i+j=s} c_i d_j,\ s = 1, \ldots, m\right)} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

где f посылает c_i в c_i, а g устроено следующим образом: оно посылает c_i в $c_i(\gamma_n)$, а d_i посылается в $c_i(\gamma_n^\perp)$. Поскольку $\gamma_n \oplus \gamma_n^\perp \cong \underline{\mathbb{R}}^m$, имеем $\sum_{i+j=s} c_i(\gamma_n) c_j(\gamma_n^\perp) = 0$ при $s \geqslant 1$, а значит соотношения в $R_{n,m-n}$ посылаются в ноль и гомоморфизм g корректно определен.

Заметим, что все отображения в (5.3) эпиморфны. Эпиморфность $\imath^*$ уже доказана в Лемме 5.38, а эпиморфность g следует из коммутативности диаграммы. Эпиморфность f следует из того факта, что образующие d_i алгебры $R_{n,m-n}$ можно рекуррентно выразить через c_i, используя соотношения (см. замечание 5.9).

Докажем, что g — инъективно. Настало время deus ex machina.

Теорема 5.39. *Пусть* $\Bbbk$ *— поле*[10], $\Bbbk[y_1, \dots, y_m]$ *— алгебра многочленов от переменных степеней* $\deg y_i = d_i$. *Пусть* $\theta_1, \dots, \theta_m \in \Bbbk[y_1, \dots, y_m]$ *— однородные элементы степеней* $\deg \theta_i = s_i$, *такие что* $\Bbbk[y_1, \dots, y_m]/(\theta_1, \dots, \theta_m)$ *есть конечномерное векторное пространство*[11]. *Тогда* $\Bbbk[y_1, \dots, y_m]/(\theta_1, \dots, \theta_m)$ *является алгеброй Пуанкаре формальной размерности* $\sum_{i=1}^m s_i - \sum_{i=1}^m d_i$.

Алгебра $R_{n,m-n}$ (вернее $R_{n,m-n} \otimes \Bbbk$ для произвольного поля $\Bbbk$) порождена m однородными образующими, m однородными соотношениями и конечномерна (упр.5.33), а значит удовлетворяет требованиям приведенной теоремы. Следовательно, $R_{n,m-n}$ является алгеброй Пуанкаре формальной размерности

$$\sum_{i=1}^{m} 2i - \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{m-n} 2i = m(m+1) - n(n+1) - (m-n)(m-n+1) = 2n(m-n) = \dim G_{n,m-n}.$$

Лемма 5.40. *Пусть* $g\colon A^* \to B^*$ *— эпиморфизм алгебр Пуанкаре одной формальной размерности* d. *Тогда* g *— изоморфизм.*

Доказательство. В старшей размерности $g\colon A^d \to B^d$ является изоморфизмом, поскольку $\dim A^d = \dim B^d = 1$. Допустим $a \in A^j$, $a \neq 0$, $g(a) = 0$. Тогда, поскольку A — это алгебра Пуанкаре, существует $a' \in A^{d-j}$, такой что $aa' \neq 0$. Тогда имеем $0 \neq g(aa') = g(a)g(a') = 0 \cdot g(a') = 0$ — противоречие. Значит g инъективен. □

Значит гомоморфизм $g\colon R_{n,m-n} \to H^*(G_{m,n}; \mathbb{Z})$ является изоморфизмом и Теорема 5.34 доказана[12].

5.6 Когомологии многообразий полных флагов

Пусть $F_n = F_{n;1,\dots,n}$ — многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^n$.

Упражнение 5.41. Доказать, что гомоморфизм $H^*(F_{\infty;1,\dots,n}; \mathbb{Z}) \to H^*(F_n; \mathbb{Z})$, индуцированный вложением $F_n \hookrightarrow F_{\infty;1,\dots,n}$, является эпиморфизмом.

Теорема 5.42. $H^*(F_n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]/(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, *где* $\deg t_i = 2$, *а* σ_i *—* i*-й элементарный симметрический многочлен от* $t_1, \dots, t_n$.

Доказательство. Заметим, что $H^*(F_{\infty;1,\dots,n}; \mathbb{Z}) = H^*(BT^n) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ (см. доказательство Теоремы 4.42). Пусть ξ_i — i-е каноническое расслоение над F_n, то есть расслоение, слоем которого над флагом $W_1 \subset \dots \subset W_n$ является одномерное пространство W_i/W_{i-1}. Заметим, что $\bigoplus_{i=1}^n \xi_i = \underline{\mathbb{R}}^n$, поэтому $\prod_{i=1}^n (1 + c_1(\xi_i)) = 1$ в $H^*(F_n; \mathbb{Z})$. Иными

[10] вполне возможно, что для $\mathbb{Z}$ теорема тоже верна, но поручиться не могу

[11] такие элементы θ_i называются однородной системой параметров

[12] Вообще-то мы доказали, что $R_{n,m-n} \otimes \Bbbk \cong H^*(G_{m,n}; \Bbbk)$. Доказательство для $\mathbb{Z}$ предлагается извлечь из формулы универсальных коэффициентов и наличия совершенной клеточной структуры самостоятельно.

словами, $\sigma_i(c_1(\xi_1), \ldots, c_1(\xi_n)) = 0$ при $i > 0$. Значит корректно определен кольцевой гомоморфизм
$$g\colon \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \to H^*(F_n; \mathbb{Z}).$$
посылающий t_i в $c_1(\xi_i)$. Из упр.5.41 следует, что g сюръективен. Из Теоремы 5.39 следует, что $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — алгебра Пуанкаре формальной размерности $n(n-1) = \dim F_n$. Значит, из Леммы 5.40 следует, что g — изоморфизм. □

Упражнение 5.43. Описать кольцо когомологий многообразия $F_{m;j_1,\ldots,j_k}$ для произвольных $j_1 < \ldots < j_k \leqslant m$.

5.7 Класс Эйлера

Пусть $\eta\colon E \to B$ — n-мерное ориентируемое вещественное расслоение. Ориентацией слоя $F_x = \eta^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n$ называется образующая α_x группы $H^n(F_x, F_x\backslash\{0\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (после всего, что происходило до этого, такой формализм не должен никого удивлять). Ориентации слоев в близких точках x, y (т.е. в точках, лежащих в одной тривиализующей окрестности U_α) называются согласованными, если они переходят друг в друга при изоморфизмах $H^n(F_x, F_x\backslash\{0\}; \mathbb{Z}) \cong H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\backslash\{0\}; \mathbb{Z}) \cong H^n(F_y, F_y\backslash\{0\}; \mathbb{Z})$, индуцированных тривиализациями $\phi_{\alpha,x}$, $\phi_{\alpha,y}$. Эквивалентным определением ориентируемости расслоения η является такое: η ориентируемо в том и только том случае, когда на слоях η можно выбрать ориентации, согласованные во всех точках.

Приведем чрезвычайно важную в алгебраической топологии теорему. Ее можно понимать как естественное обобщение Предложения 2.10 (теоремы о существовании фундаментального класса у ориентируемого многообразия).

Теорема 5.44 (Теорема Тома). *Пусть $\eta\colon E \to B$ — n-мерное ориентируемое вещественное расслоение над CW-комплексом B и выбраны согласованные ориентации всех слоев. Пусть B вложено в E в качестве нулевого сечения. Тогда существует единственный класс $u \in H^n(E, E\backslash B; \mathbb{Z})$, ограничение которого на любой слой $(F_x, F_x\backslash\{0\})$ дает выбранную ориентацию этого слоя. Кроме того, отображение $H^k(B;\mathbb{Z}) \cong H^k(E;\mathbb{Z}) \to H^{k+n}(E, E\backslash B; \mathbb{Z})$, индуцированное $\smile$-произведением с u является изоморфизмом.*

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательствам Предложения 2.10 и Теорем 2.16, 4.43. Аргумент Майера–Вьеториса позволяет свести утверждение к достаточно малому подмножеству $B' \subset B$. Но малое подмножество B' обязано попасть в тривиализующее множество, а на нем теорема выполнена по построению (а последняя часть следует из формулы Кюннета). □

Построенный класс $\mathrm{th}(\eta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u \in H^n(E, E\backslash B; \mathbb{Z})$ называется классом Тома, а изоморфизм $H^*(B;\mathbb{Z}) \stackrel{\smile \mathrm{th}(\eta)}{\to} H^{k+n}(E, E\backslash B; \mathbb{Z})$ — изоморфизмом Тома.

Имеется еще одна распространенная формулировка этой теоремы. Пусть $T\eta$ — одноточечная компактификация тотального пространства векторного расслоения η.

Пространство $T\eta$ называется пространством Тома расслоения η. Тогда

$$\widetilde{H}^{k+n}(T\eta) \cong H^k(B).$$

Докажем это. Пусть $B\eta \supset S\eta$ — пространства единичных шаров и единичных сфер в расслоении η. Тогда $T\eta \cong B\eta/S\eta$ и мы имеем $H^{k+n}(E, E\backslash B; \mathbb{Z}) \cong H^{k+n}(B\eta, B\eta\backslash B; \mathbb{Z}) \cong H^{k+n}(B\eta, S\eta; \mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}^{k+n}(T\eta; \mathbb{Z})$, где первый изоморфизм — свойство вырезания, второй изоморфизм следует из ретракции $B\eta\backslash B \to S\eta$, а третий — стандартное свойство гомологий.

Определение 5.45. Образ класса Тома $\mathrm{th}(\eta)$ при гомоморфизме $H^n(E, E\backslash B; \mathbb{Z}) \to H^n(E; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^n(B; \mathbb{Z})$ называется классом Эйлера ориентированного n-мерного векторного расслоения η. Он обозначается $e(\eta)$.

Пусть $f\colon B' \to B$ непрерывное отображение и $f^*\eta\colon f^*E \to B'$ — индуцированное ориентированное векторное расслоение над B'. Когомологические классы $f^*(\mathrm{th}(\eta))$ и $\mathrm{th}(f^*(\eta))$ совпадают, поскольку они оба отображаются в одну и ту же ориентацию для каждого слоя (тут мы пользуемся единственностью класса Тома). Следовательно, $f^*(e(\eta)) = e(f^*(\eta))$. Мы доказали

Теорема 5.46. *Класс Эйлера является характеристическим классом ориентированных n-мерных вещественных векторных расслоений, принимающим значение в $H^n(B; \mathbb{Z})$. При изменении ориентации расслоения η класс $e(\eta)$ меняет знак.*

Упражнение 5.47. Если η нечетномерно, то $2e(\eta) = 0$.

Упражнение 5.48. $e(\eta_1 \oplus \eta_2) = e(\eta_1) \smile e(\eta_2)$.

Упражнение 5.49. Пусть $2e(\eta) \neq 0$. Тогда η не может быть представлено в виде прямой суммы двух векторных расслоений, одно из которых нечетномерно.

Имя Эйлера в названии термина объясняется следующей теоремой

Теорема 5.50. *Пусть M — гладкое замкнутое ориентированное многообразие. Тогда $\int_M e(TM) = \langle e(TM), [M]\rangle = \chi(M)$ — эйлерова характеристика.*

Доказательство. Нам понадобятся некоторые технические, но имеющие огромную самостоятельную ценность результаты.

Теорема 5.51 (Теорема о трубчатой окрестности)**.** *Пусть M — гладкое подмногообразие в N. Тогда существует открытая окрестность M в N, диффеоморфная тотальному пространству E нормального расслоения к M при диффеоморфизме, который переводит каждую точку M в нулевой нормальный вектор к этой точке.*

Следствие 5.52. *В обозначениях предыдущей теоремы имеем $H^*(E, E\backslash M; R) \cong H^*(N, N\backslash M; R)$.*

Доказательство. Свойство вырезания для когомологий. □

Предложение 5.53. *Пусть $M^m \subset N^{m+k}$ — ориентируемое гладкое замкнутое подмногообразие, $u \in H^k(E, E\backslash M; \mathbb{Z}) \cong H^k(N, N\backslash M; \mathbb{Z})$ — класс Тома его нормального расслоения, а $p^*\colon H^*(N, N\backslash M; \mathbb{Z}) \to H^*(N; \mathbb{Z})$ отображение когомологий, индуцированное вложением пар $p\colon (N, \varnothing) \to (N, N\backslash M)$. Тогда класс $p^*(u) \in H^k(N; \mathbb{Z})$ является двойственным по Пуанкаре к классу $[M] \in H_m(N; \mathbb{Z})$.*

Доказательство. Точно так же, как определялось $\frown$-произведение, определяется его относительная версия

$$H_{m+k}(X, A \cup B) \otimes H^k(X, A) \to H_m(X, B), \tag{5.4}$$

которая функториальна (в смысле формул типа (2.1)) относительно всевозможных отображений. Если положить в (5.4) $X = \mathbb{R}^{m+k}$, $A = \mathbb{R}^{m+k}\backslash\mathbb{R}^m$, $B = \mathbb{R}^{m+k}\backslash\mathbb{R}^k$ (мы полагаем, что $\mathbb{R}^{m+k}$ представлено в виде прямой суммы $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^k$) и, как следствие $A \cup B = \mathbb{R}^{m+k}\backslash\{0\}$, то формула (5.4) превращается в естественный изоморфизм $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$.

Для доказательства утверждения необходимо проверить, что $[N] \frown p^*(u) = [M]$, или, что эквивалентно, $p_*([N]) \frown u = [M]$ (эту формулу нужно понимать в смысле отображения $H_{m+k}(N, N\backslash M) \otimes H^k(N, N\backslash M) \xrightarrow{\frown} H_m(N)$). Пусть $x \in M \subset N$ — произвольная точка, $T_xM \cong \mathbb{R}^{m+k}$ — касательное пространство к M, $T_xN \cong \mathbb{R}^m$ — касательное пространство к N, $\nu_x \cong \mathbb{R}^k$ — нормальное пространство к M в N.

Класс $p_*([N]) \in H_{m+k}(N, N\backslash M)$ — это единственный класс, который отображается в локальную ориентацию M при отображении в $H_{m+k}(N, N\backslash x) \cong H_{m+k}(T_xN, T_xN\backslash\{0\})$ для любой точки x. Класс Тома u — это единственный класс, который отображается в локальную ориентацию нормального расслоения при ограничении на $H^k(\nu_x, \nu_x\backslash\{0\}) \cong H^k(T_xN, T_xN\backslash T_xM)$. Класс $[M] \in H_m(N)$ — это единственный класс, который отображается в локальную ориентацию касательного расслоения к M при отображении в $H^k(M, M\backslash x) \cong H^k(T_xM, T_xM\backslash\{0\}) \cong H^k(T_xN, T_xN\backslash\nu_x)$. Из всех этих единственностей и написанного в первом абзаце доказательства следует утверждение. □

Предложение 5.54. *Пусть $\Delta\colon M \to M \times M$ — диагональное вложение. Нормальное расслоение к диагонали $\Delta(M)$ в $M \times M$ эквивалентно касательному расслоению к M.*

Доказательство. Упражнение. □

Следствие 5.55. *Пусть $\omega \in H^m(M \times M)$ — класс, Пуанкаре двойственный к диагонали $[\Delta(M)] \in H_m(M \times M)$. Тогда $\int_M e(TM) = \int_{M\times M} \omega \smile \omega$.*

Следствие 5.56. *Пусть $A \subset M \times M$ — пошевеленная диагональ, то есть гладкое подмногообразие, представляющее класс $[\Delta(M)]$ и трансверсальное к $\Delta(M)$. Тогда число $\int_M e(TM)$ совпадает с суммой знаков точек пересечения A и $\Delta(M)$ в $M \times M$.*

Пусть $s\colon M \to TM$ — гладкое векторное поле на M (то есть гладкое сечение касательного расслоения). Допустим, что s трансверсально к нулевому сечению. Точка $x \in M$ называется особой точкой векторного поля s, если $s(x) = 0$. Иными словами, особые точки — это точки пересечения s с нулевым сечением. Знаком особой точки называется знак пересечения s с нулевым сечением в этой точке. Знак можно явно вычислить: локально сечение s является отображением из $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$, и знак сечения есть знак якобиана этого отображения в точке x.

Поскольку шевелить диагональ $\Delta(M) \subset M \times M$ достаточно лишь в трубчатой окрестности этой диагонали, а трубчатая окрестность диффеоморфна тотальному пространству нормального (а значит и касательного расслоения), из предыдущего следствия получаем.

Следствие 5.57. *Число $\int_M e(TM)$ равно сумме знаков векторного поля на M, трансверсального к нулевому сечению.*

Пусть K — триангуляция гладкого многообразия M. Построим специальное векторное поле на симплексах триангуляции K как показано на рис.2

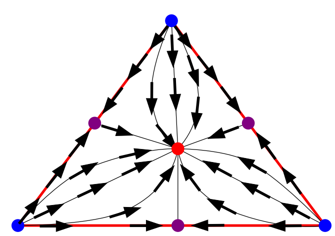

Рис. 2: Векторное поле на симплексе триангуляции

Видно, что особые точки этого векторного поля соответствуют симплексам, причем каждый j-мерный симплекс дает особую точку знака $(-1)^j$. Следовательно, сумма знаков особых точек равна эйлеровой характеристике.[13] □

Упражнение 5.58. Построения и утверждения этого параграфа можно провести в случае, когда M не ориентируемо, а кольцо коэффициентов — $\mathbb{Z}_2$. Докажите, что $\mathbb{Z}_2$-аналог класса Эйлера совпадает с $w_m(M)$ — старшим классом Штифеля–Уитни.

Упражнение 5.59. Пусть η — комплексное расслоение размерности n, и $\eta_\mathbb{R}$ — его овеществление. Тогда $c_n(\eta) = e(\eta_\mathbb{R})$. (Указание: рассмотреть классифицирующие расслоения над $BU(n)$, BT^n, BT^1).

Упражнение 5.60. Точная последовательность Гизина. Пусть $\xi\colon E \to B$ — ориентируемое n-мерное векторное расслоение. Докажите существование точной последовательности

$$\cdots \to H^i(B) \stackrel{\smile e(B)}{\to} H^{i+n}(B) \to H^{i+n}(E\backslash B) \to H^{i+1}(B) \to \cdots ,$$

используя точную последовательность когомологий пары $(E, E\backslash B)$.

Упражнение 5.61. При каких n на сфере S^n существует нигде не нулевое векторное поле?

[13] Альтернативное и более строгое алгебраическое доказательство последнего шага, не использующее векторные поля см. в [7]

5.8 Классы Понтрягина

Пусть η — вещественное векторное расслоение размерности n над B. Рассмотрим его комплексификацию $\eta_{\mathbb{C}} = \eta \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (в смысле общекатегорной конструкции 4.26). Тогда $\eta_{\mathbb{C}}$ — комплексное расслоение комплексной размерности n.

Заметим, что $\eta_{\mathbb{C}} \cong \overline{\eta_{\mathbb{C}}}$, а значит $2c_i(\eta_{\mathbb{C}}) = 0$ при нечетных i (см. упражнение 5.15). Игнорируя элементы порядка два, дадим следующее определение

Определение 5.62. i-м классом Понтрягина вещественного расслоения η называется элемент $p_i(\eta) = (-1)^i c_{2i}(\eta_{\mathbb{C}}) \in H^{4i}(B;\mathbb{Z})$.

Формальная сумма $1 + p_1(\eta) + \ldots + p_{[n/2]}(\eta)$ называется полным классом Понтрягина. Поскольку классы Черна — характеристические, а операция комплексификации естественна, классы Понтрягина также являются характеристическими классами (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$).

Упражнение 5.63. Элемент $p(\eta_1 \oplus \eta_2)$ сравним с $p(\eta_1)p(\eta_2)$ по модулю элементов порядка 2. Иными словами, $2(p(\eta_1 \oplus \eta_2) - p(\eta_1)p(\eta_2)) = 0$.

Упражнение 5.64. Пусть ξ — комплексное расслоение. Тогда $(\xi_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \xi \oplus \bar{\xi}$. Вывести отсюда, что для комплексных расслоений выполнено

$$1 - p_1 + p_2 - p_3 + \cdots = (1 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots)(1 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots)$$

Упражнение 5.65. Пусть η — ориентированное n-мерное вещественное расслоение. Тогда $(\eta_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \eta \oplus \eta$ при изоморфизме, который либо сохраняет, либо меняет ориентацию в зависимости от четности числа $n(n-1)/2$.

Для всякого $2k$-мерного ориентированного вещественного расслоения η выполнено $p_k(\eta) = e(\eta)^2$.

Оказывается, что классами Понтрягина и классом Эйлера исчерпываются все хар.классы ориентируемых вещественных расслоений, если не учитывать 2-кручение.

Вспомним, что $\widetilde{G}_{\infty,n}$ — бесконечномерный грассманиан ориентированных n-плоскостей, — является базой универсального $SO(n)$-расслоения. Описание хар.классов ориентированных расслоений (с коэффициентами в R) эквивалентно описанию когомологий пространства $\widetilde{G}_{\infty,n} = BSO(n)$ (с коэффициентами в R).

Пусть $\tilde{\gamma}_m$ — каноническое расслоение над грассманианом ориентированных плоскостей. Пусть R — область целостности, содержащая $\frac{1}{2}$ (например, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ или любое поле характеристики, не равной 2).

Теорема 5.66. *При сделанных выше ограничениях на R, кольцо $H^*(\widetilde{G}_{\infty,2k+1};R)$ является кольцом многочленов, порожденным классами Понтрягина $p_1(\tilde{\gamma}_{2k+1}), \ldots, p_k(\tilde{\gamma}_{2k+1})$. Кольцо $H^*(\widetilde{G}_{\infty,2k};R)$ порождено классами Понтрягина $p_1(\tilde{\gamma}_{2k}), \ldots, p_k(\tilde{\gamma}_{2k})$, классом Эйлера $e(\tilde{\gamma}_{2k})$ и имеет единственное соотношение $p_k(\tilde{\gamma}_{2k}) = e(\tilde{\gamma}_{2k})^2$.*

Доказательство см.[7].

6 Характеристические числа и роды Хирцебруха

6.1 Числа Черна и Понтрягина

Числа Черна и Понтрягина определяются абсолютно аналогично числам Штифеля–Уитни, но при этом лежат в $\mathbb{Z}$. Пусть $c_1(M), \ldots, c_n(M)$ — классы Черна касательного расслоения гладкого замкнутого почти комплексного многообразия M вещественной размерности $2n$, а $[M] \in H_{2n}(M;\mathbb{Z})$ — его фундаментальный класс (комплексная структура в касательном расслоении дает ориентацию, поэтому фундаментальный класс корректно определен). Пусть $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$. Тогда определено число Черна

$$\int_M c_1^{j_1} \cdots c_n^{j_n} = \langle c_1^{j_1} \cdots c_n^{j_n}, [M] \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Числа Черна являются мощным числовым инвариантом почти комплексных многообразий. Числа Понтрягина являются инвариантами ориентируемых многообразий. Осталось понять, “инвариантами чего” они являются.

Заметим, что эйлерова характеристика является гомотопическим инвариантом. Однако, когда речь идет о многообразиях, отношение гомотопической эквивалентности не очень удобно: трудно придумать два замкнутых многообразия, которые были бы гомотопны, но не гомеоморфны.

6.2 Бордизмы

Теорема 6.1 (Теорема Понтрягина)**.** *Если M^{4k} является границей ориентируемого компактного многообразия B^{4k+1}, то все числа Понтрягина многообразия M^{4k} равны нулю.*

Заметим, что ориентация на многообразии с краем определяет ориентацию края. Введем на множестве гладких ориентируемых многообразий отношение эквивалентности: скажем, что ориентируемые многообразия M_1, M_2 размерности n (ориентированно) бордантны, если существует ориентируемое многообразие N с краем, такое что $\partial N = M_1 \sqcup (-M_2)$, где $-M_2$ обозначает многообразие M_2 с обращенной ориентацией.

Упражнение 6.2. Докажите, что отношение бордантности является отношением эквивалентности.

Упражнение 6.3. Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$. Тогда любое хар. число многообразия M равно сумме соответствующих хар.чисел многообразий M_1, M_2.

Упражнение 6.4. Поскольку комплексификация $\eta_{\mathbb{C}}$ не зависит от ориентации на η, любое хар. число Понтрягина p_ω удовлетворяет формуле $p_\omega(-M) = -p_\omega(M)$.

Из этих упражнений и теоремы 6.1 следует

Следствие 6.5. *Числа Понтрягина являются инвариантами класса ориентированного бордизма.*

Замечание 6.6. Похожим образом можно определить отношение неориентированной бордантности и комплексной бордантности (хотя в комплексном случае нужно проделать определенную работу). Числа Штифеля–Уитни являются инвариантами неориентированной бордантности, а числа Черна — инвариантами комплексной бордантности.

На множестве классов бордизма ориентированных многообразий можно задать следующие операции

1. Сложение многообразий — их несвязное объединение.

2. Умножение на целые числа: kM есть несвязное объединение k копий M, если $k > 0$, а $-1 \cdot M = -M$ — многообразие с противоположной ориентацией.

3. Умножение многообразий — их декартово произведение.

Таким образом, множество всех классов бордизма становится градуированным кольцом, которое называется кольцом ориентированных (ко)бордизмов и обозначается Ω_*^{SO}. Пусть $n = 4k$ и $\omega = (j_1, \dots, j_k)$, $j_1 + 2j_2 + \dots + kj_k = k$ — фиксированное разбиение числа k.

Следствие 6.7. *Число Понтрягина p_ω задает гомоморфизм группы кобордизмов $\Omega_{4k}^{\mathrm{SO}}$ в группу $\mathbb{Z}$.*

Теорема 6.8 (Том)**.** *Не существует универсальных линейных соотношений на числа Понтрягина ориентированных многообразий. Не существует универсальных линейных соотношений на числа Черна почти комплексных многообразий.*

Доказательство см.[7, Т-мы 16.7, 16.8]. Следовательно, ранг группы $\Omega_{4k}^{\mathrm{SO}}$ — как минимум число разбиений $\omega = (j_1, \dots, j_k)$ числа k. Вообще говоря, кольцо ориентированных кобордизмов устроено сложно — в нем есть конечное кручение. Например, известно, что $\Omega_5^{\mathrm{SO}} \cong \mathbb{Z}_2$. Однако по модулю кручения кольцо ориентированных кобордизмов описывается следующим образом.

Теорема 6.9 (Том)**.** $\Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[[\mathbb{C}P^2], [\mathbb{C}P^4], [\mathbb{C}P^6], \dots]$. *Более того, $\Omega_{4k}^{\mathrm{SO}}$ является свободной абелевой группой, ранг которой равен числу разбиений числа k.*

Таким образом, над $\mathbb{Q}$ числа Понтрягина исчерпывают все инварианты ориентированного бордизма $4k$-мерных многообразий. Имеется и более сильное утверждение.

Теорема 6.10 (Уолл)**.** *Многообразие M является границей ориентированного многообразия с границей в том и только том случае, когда все его числа Понтрягина и Штифеля–Уитни равны нулю. В Ω_*^{SO} нет кручения кроме $\mathbb{Z}_2$-кручения.*

Упражнение 6.11. Связной суммой $M \# N$ многообразий M и N одной размерности называется многообразие, получаемое вырезанием маленьких дисков из M и N и склеиванием по полученной границе. Докажите, что $M \# N$ бордантна $M \sqcup N$.

6.3 Роды Хирцебруха

Числа Понтрягина являются аддитивными инвариантами бордизма, но они не обладают мультипликативностью. Хочется это исправить. Пусть R — произвольное кольцо, содержащее $\frac{1}{2}$.

Определение 6.12. Родом Хирцебруха называется мультипликативный гомоморфизм колец $\Omega_*^{\mathrm{SO}} \to R$.

Иными словами, род Хирцебруха — это мультипликативный аддитивный инвариант бордизма гладких многообразий, принимающий значение в кольце R. Имеется несложный алгоритм построения таких инвариантов, на вход которого надо подать формальный степенной ряд.

Конструкция 6.13. Пусть $Q(t) \in R[[t]]$ — формальный степенной ряд. Пусть M — гладкое многообразие размерности $n = 4k$, а $t_1, \ldots, t_k$ — корни Понтрягина его касательного расслоения (то есть такие формальные символы, что $\sigma_i(t_1, \ldots, t_k) = p_i(TM)$). Определим число

$$\chi_Q(M) = \int_M Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k) \in R.$$

Поясним, что всё это значит. Ряд $Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k)$ является симметрическим формальным рядом от переменных $t_1, \ldots, t_k$, а значит выражается единственным образом через элементарные симметрические многочлены:

$$Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k) \in R[[\sigma_1, \ldots, \sigma_k]].$$

Заменяя каждый элементарный симметрический многочлен на соответствующий класс Понтрягина, получаем $Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k) \in H^*(M; R)$ (бесконечный ряд на самом деле обрывается, поскольку в размерностях, больших $4k$, никаких когомологий нет). Пусть $K_k(p_1, \ldots, p_k)$ — компонента элемента $Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k)$, лежащая в группе когомологий старшей размерности $H^{4k}(M; R)$. Результат спаривания $K_k(p_1, \ldots, p_k)$ с фундаментальным классом мы и обозначаем $\chi_Q(M)$.

Таким образом, мы получили функцию χ_Q, которая каждому многообразию M сопоставляет число $\chi_Q(M) \in R$.

Предложение 6.14. *χ_Q является родом Хирцебруха.*

Доказательство. По построению $\chi_Q(M)$ является линейной комбинацией чисел Понтрягина, а значит это аддитивный инвариант бордизма. Надо только доказать мультипликативность: $\chi_Q(M \times N) = \chi_Q(M)\chi_Q(N)$. В Предложении 5.3 мы фактически доказали, что если $t_1, \ldots, t_m$ — корни Черна расслоения ξ, $t'_1, \ldots, t'_n$ — корни Черна расслоения η, то набор формальных символов $t_1, \ldots, t_m, t'_1, \ldots, t'_n$ можно рассматривать как корни Черна расслоения $\xi \oplus \eta$ (см.замечание 5.4). Абсолютно аналогично проверяется, что если $t_1, \ldots, t_m$ — корни Понтрягина расслоения TM, $t'_1, \ldots, t'_n$ — корни

Понтрягина расслоения TN, то объединенный набор $t_1, \dots, t_m, t'_1, \dots, t'_n$ можно рассматривать как корни Понтрягина расслоения $T(M \times N)$. Имеем

$$\chi_Q(M \times N) = \int_{M\times N} Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_m) Q(t'_1) \cdot \ldots \cdot Q(t'_n) =$$
$$= \left(\int_M Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_m) \right) \left(\int_N Q(t'_1) \cdot \ldots \cdot Q(t'_n) \right) = \chi_Q(M)\chi_Q(N). \quad (6.1)$$

□

Предложение 6.15 (Следствие теоремы Тома о структуре кольца кобордизмов)**.** *Любой род Хирцебруха $\Omega_*^{\mathrm{SO}} \to \mathbb{Q}$ задается некоторым рядом.*

Упражнение 6.16. Является ли эйлерова характеристика родом Хирцебруха? Если да, то какой ряд ее задает?

6.4 Известные роды

L-род: сигнатура Существует естественный род Хирцебруха, имеющий геометрическую природу. Пусть M^{4k} — ориентируемое связное многообразие. Билинейная форма $H^{2k}(M;\mathbb{Q}) \otimes H^{2k}(M;\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$, $\omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto \int_M (\omega_1 \smile \omega_2)$ невырождена (двойственность Пуанкаре) и симметрична (элементы четной степени коммутируют). Сигнатура этой формы (то есть число “+1” минус число “−1” на диагонали ее канонической формы) называется сигнатурой многообразия M и обозначается $\sigma(M)$. Если M несвязно, положим $\sigma(M) = \sum \sigma(M_i)$, сумма по всем связным компонентам M. Если размерность M не делится на 4, положим $\sigma(M) = 0$.

Предложение 6.17. *Сигнатура является родом Хирцебруха.*

Доказательство. Мультипликативность следует из формулы Кюннета. Аддитивность получается из определения. Изменение знака сигнатуры при изменении ориентации также очевидно, поскольку фундаментальный класс меняет знак. Единственное, что требует доказательства, это инвариантность относительно бордизма.

Пусть $M^m = \partial B^{m+1}$ и B (следовательно и M) — ориентируемо и пусть B связно. Пусть $[B] \in H_{m+1}(B, M)$ и $[M] \in H_m(M)$ — фундаментальные классы (все коэффициенты предполагаются в $\mathbb{Q}$). Нам потребуется небольшое усиление двойственности Пуанкаре–Лефшеца, а именно следующий факт: с точностью до знаков имеет место изоморфизм точных последовательностей

$$\begin{tikzcd}
H^k(B) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\cong"', "{[B]\frown}"] & H^k(M) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\cong"', "{[M]\frown}"] & H^{k+1}(B,M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "{[B]\frown}"] & H^{k+1}(B) \arrow[d, "\cong"', "{[B]\frown}"] \\
H_{m+1-k}(B,M) \arrow[r, "\delta_*"] & H_{m-k}(M) \arrow[r, "i_*"] & H_{m-k}(B) \arrow[r] & H_{m-k}(B,M)
\end{tikzcd}$$

где сверху стоит точная последовательность когомологий пары (B, M), а снизу — точная последовательность гомологий этой же пары [1, Th.9.2].

Лемма 6.18. *Пусть связное многообразие M — граница $(2n+1)$-мерного ориентируемого многообразия B. Тогда* $\dim H^n(M^{2n})$ *четно и*

$$\dim \operatorname{Ker}(i_*\colon H_n(M) \to H_n(B)) = \dim \operatorname{Im}(i^*\colon H^n(B) \to H^n(M)) = \frac{1}{2}\dim H^n(M^{2n}).$$

Более того, когомологическое умножение на $\operatorname{Im}(i^*)$ *в средней размерности тривиально.*

Доказательство. Из диаграммы Пуанкаре–Лефшеца имеем $[M] \frown \operatorname{Im}(i^*) = \operatorname{Ker}(i_*)$. Значит, $\operatorname{rk}(i^*) = \dim \operatorname{Im}(i^*) = \dim H^n(M) - \operatorname{rk}(i_*) = H^n(M) - \operatorname{rk}(i^*)$, откуда следует, что $\dim H_n(M) = 2\operatorname{rk}(i^*)$ (отображения i_* и i^* двойственны друг к другу, значит имеют одинаковый ранг). Значит, $\dim H_n(M) = 2\dim \operatorname{Im}(i^*) = 2\dim \operatorname{Ker}(i_*)$.

Пусть $\alpha, \beta \in H^n(B)$. Тогда $\delta^*(i^*(\alpha) \smile i^*(\beta)) = (\delta^* i^*)(\alpha \smile \beta) = 0$, поскольку $\delta^* i^* = 0$. С другой стороны, $\delta^*\colon H^{2n}(M) \to H^{2n+1}(B, M)$ является мономорфизмом, поскольку он совпадает с $i_*\colon H_0(M) \to H_0(B)$ с точностью до изоморфизма. Значит, $\alpha \smile \beta = 0$. □

Теперь легко доказать, что если $4k$-мерное связное многообразие M является границей многообразия B, то его сигнатура нулевая. Действительно, сигнатура является симметричной невырожденной билинейной формой на $H^{2k}(M)$. Пусть $\dim H^{2k}(M) = d$. Из Леммы следует, что у формы спаривания есть изотропное подпространство $\operatorname{Im}(i^*\colon H^{2k}(B) \to H^{2k}(M))$ размерности $\frac{d}{2}$. Значит подпространство, на котором форма положительно определена не может иметь размерность больше $\frac{d}{2}$. Аналогично с отрицательным подпространством. Значит, и положительное и отрицательное подпространства имеют размерность $\frac{d}{2}$ и сигнатура равна 0.

Упражнение 6.19. Используя идеи, предложенные в доказательстве выше, докажите следующее утверждение. Если M^{4k} — граница ориентируемого многообразия B (возможно, несвязная), то сумма сигнатур ее компонент связности равна 0.

Из упражнения и определения бордизма следует, что сигнатура является инвариантом бордизма. □

Из теоремы Тома (см. Предложение 6.15) следует, что сигнатура должна задаваться некоторым рядом. Этот ряд был вычислен Хирцебрухом.

Теорема 6.20 (Теорема Хирцебруха о сигнатуре)**.** *Сигнатура задается рядом*

$$L(t) = \frac{\sqrt{t}}{\tanh(\sqrt{t})} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j} B_{2j}}{(2j)!} t^j,$$

где $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *— гиперболический тангенс, а* B_{2k} *— числа Бернулли.*

Доказательство. Пусть χ_L — род Хирцебруха, задавемый рядом $\dfrac{\sqrt{t}}{\tanh(\sqrt{t})}$. И сигнатура и χ_L являются родами Хирцебруха, значит достаточно проверить, что их значения совпадают на образующих кольца $\Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q}$. По теореме Тома, в качестве образующих можно взять $\mathbb{C}P^{2n}$, $n \geqslant 1$. Легко проверить, что сигнатура любого $\mathbb{C}P^{2n}$ равна 1.

Пусть $a \in H^2(\mathbb{C}P^{2n};\mathbb{Q})$ — образующая кольца когомологий. Из упражнений 5.19 и 5.64 выводится, что полный класс Понтрягина касательного расслоения $T\mathbb{C}P^{2n}$ равен $(1+a^2)^{2n+1}$. Для подсчета значения $\chi_L(\mathbb{C}P^{2n})$, нужно проинтегрировать $\prod_i L(t_i)$ по $\mathbb{C}P^{2n}$, где t_i — корни Понтрягина, то есть такой набор формальных символов, что $\sigma_j(t_i) = p_j(\mathbb{C}P^{2n})$, или, эквивалентно, $\prod_i(1+t_i) = p(\mathbb{C}P^{2n})$. В качестве такого набора можно взять вполне конкретные (не формальные!) элементы $t_i = a^2 \in H^4(\mathbb{C}P^{2n})$, $i = 1, \ldots, 2n+1$, поскольку они свойству $\prod_i(1+t_i) = p(\mathbb{C}P^{2n})$ как раз удовлетворяют. Значит, $\prod_{i=1}^{2n+1} L(t_i) = \left(\dfrac{\sqrt{a^2}}{\tanh\sqrt{a^2}}\right)^{2n+1} = \left(\dfrac{a}{\tanh a}\right)^{2n+1}$. Проинтегрировать этот элемент по $\mathbb{C}P^{2n}$ означает найти коэффициент формального ряда $\left(\dfrac{a}{\tanh a}\right)^{2n+1}$ при a^{2n}. Это уже задача матана.

Коэффициент C при z^{2n} комплексного ряда $\left(\dfrac{z}{\tanh z}\right)^{2n+1}$ можно посчитать как

$$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \frac{1}{z^{2n+1}} \left(\frac{z}{\tanh z}\right)^{2n+1} dz = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \frac{dz}{(\tanh z)^{2n+1}}.$$

(интегрируем вокруг нуля). Делая замену $u = \tanh(z)$, получаем,

$$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \frac{(1+u^2+u^4+\ldots)du}{u^{2n+1}} = 1.$$

Значит $\chi_L(\mathbb{C}P^{2n}) = 1 = \sigma(\mathbb{C}P^{2n})$ и теорема доказана. □

Замечание 6.21. Сигнатура также называется L-родом. Заметим, что значение L-рода на любом многообразии является целым числом, поскольку он совпадает с сигнатурой. Из задания L-рода при помощи ряда это отнюдь не очевидно.

Классы Понтрягина, а значит и числа Понтрягина, а значит и роды Хирцебруха, можно определить не только для гладких многообразий, но и для кусочно-линейных многообразий. Милнор построил 8-мерное кусочно-линейное многообразие, значение L-рода на котором не целое. А значит, это многообразие не является гладким (совпадение сигнатуры и L-рода имеет место для гладких многообразий).

Замечание 6.22. Для удобства пусть здесь будет начальный кусок разложения в ряд Тейлора: $t/\tanh(t) = 1 + t^2/3 - t^4/45 + 2t^6/945 + \ldots$.

Замечание 6.23. Явные вычисления показывают, что на 4-мерных гладких многообразиях $\sigma(M) = \chi_L(M) = \frac{1}{3}\int_M p_1(M)$, а на 8-мерных $\sigma(M) = \chi_L(M) = \frac{1}{45}\int_M (7p_2(M) - p_1(M)^2)$. Как следствие, первое число Понтрягина 4-мерного многообразия должно быть кратно 3, а число $\langle 7p_2(M^8) - p_1(M^8)^2, [M]\rangle$ — кратно 45.

Род Тодда

Определение 6.24. Ориентируемое многообразие M называется стабильно почти комплексным (или просто стабильно комплексным), если фиксирован изоморфизм вещественных расслоений $TM \oplus \mathbb{R}^k \cong \eta$, где η — комплексное расслоение (иными словами, на TM после добавления тривиального слагаемого введена комплексная структура).

Для стабильно комплексных многообразий можно естественным образом определить классы Черна: $c_i(M) = c_i(\eta) \in H^{2i}(M;\mathbb{Z})$ и, как следствие, числа Черна.

Используя вместо классов Понтрягина классы Черна, можно так же как и раньше задавать мультипликативные роды из кольца комплексных кобордизмов Ω_*^U в R.[14]

Определение 6.25. Род Хирцебруха стабильно комплексных многообразий, заданный рядом $Q_y(t) = \dfrac{t(1+ye^{-t(1+y)})}{1-e^{-t(1+y)}}$, называется χ_y-рядом. Здесь y — параметр.

При $y = -1$ получаем $Q_{-1}(t) = t$, а значит $\chi_{-1}(M) = \int_M t_1 \dots t_n = \int_M c_n(M)$ (если M — почти комплексное, то это число совпадает с эйлеровой характеристикой, поскольку $c_n(TM) = e(TM)$). При $y = 1$ получаем $Q_1(t) = \dfrac{t}{\tanh(t)}$, значит $\chi_1(M) = \sigma(M)$ — сигнатура (поскольку для стабильно комплексных многообразий "корни Черна — это квадратные корни из корней Понтрягина", см. упр.5.64). При $t = 0$ получаем $Q_0(t) = \frac{t}{1-e^{-t}}$. Соответствующий род называется родом Тодда.

Можно понимать y как универсальный параметр, то есть считать, что χ_y — это род, принимающий значение в $R = \mathbb{Q}[y]$.

Теорема 6.26 (Хирцебрух)**.** *Пусть M^{2n} — компактное комплексное многообразие. Тогда $\chi_y(M) = \sum_p \chi^p(M) y^p$. Здесь $\chi^p(M) = \sum_{q=0}^n (-1)^q h^{p,q}(M)$, где $h^{p,q}(M)$ — числа Ходжа (размерности когомологий Дольбо). В частности, род Тодда совпадает с арифметическим родом.*

Замечание 6.27. Если M — почти комплексное многообразие, то также верна формула $\chi_y(M) = \sum_p \chi^p(M) y^p$, где на этот раз $\chi^p(M)$ — индексы дифференциальных операторов специального вида, то есть целые числа. В частности, род Тодда любого почти комплексного многообразия — целое число.

Пример 6.28. Пусть M — почти комплексное многообразие вещественной размерности 4. Пусть $c_2 = \int_M c_2(M)$, $c_1^2 = \int_M c_1(M)^2$. Имеем $\chi(M) = c_2$, $\sigma(M) = \frac{c_1^2 - 2c_2}{3}$, $\mathrm{Td}(M) = \frac{c_1^2 + c_2}{12}$. Отсюда вытекает $\mathrm{Td}(M) = \frac{\chi(M)+\sigma(M)}{4}$.

Пример 6.29. Известно, что $M = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ — стабильно комплексное многообразие (см.[8, стр.126]). Несложный подсчет дает $\chi(M) = 4$, $\sigma(M) = 2$. Значит $\mathrm{Td}(M) = 3/2$. Следовательно на M не существует почти комплексной структуры, согласно замечанию 6.27 и выкладке из предыдущего примера.

[14]Кольцо комплексных кобордизмов не определялось, но для дальнейшего достаточно понимать, что в данный момент мы с помощью рядов и классов Черна строим инварианты не всех многообразий, а лишь стабильно комплексных.

Замечание 6.30. При этом, $\mathbb{C}P^2 \# (-\mathbb{C}P^2)$ — это вполне себе комплексное многообразие, даже алгебраическое. В алгебраической геометрии оно получается как раздутие $\mathbb{C}P^2$ в точке и называется поверхностью Хирцебруха (пример торического многообразия).

6.5 Характер Черна

Упражнение 6.31. Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — корни Черна расслоения ξ, а $t'_1, \ldots, t'_k$ — корни Черна расслоения η над той же базой. Докажите, что набор $\{t_i + t_j\}_{\substack{i\in[n]\\ j\in[k]}}$ является набором корней Черна расслоения $\xi \otimes \eta$.

Указание:

1. Если $f, g \colon B \to BU(n)$ классифицируют ξ и η соответственно, то $\xi \otimes \eta$ классифицируется композицией $B \xrightarrow{\Delta} B \times B \xrightarrow{f\times g} BU(n) \times BU(k) \to BU(nk)$, где последнее отображение индуцировано гомоморфизмом групп $s \colon U(n) \times U(k) \to U(nk)$, отправляющим матрицы $A \in U(n)$, $C \in U(k)$ в их кронекерово (тензорное) произведение.

2. Рассмотреть отображение $r \colon T^n \times T^k \to T^{n+k}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \times (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k) \mapsto (t_i t'_j)$ и индуцированную диаграммы

$$\begin{tikzcd} T^n \times T^k \arrow[r, "r"] \arrow[d, hook] & T^{nk} \arrow[d, hook] \\ U(n) \times U(k) \arrow[r, "s"] & U(nk) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} BT^n \times BT^k \arrow[r, "Br"] \arrow[d] & BT^{nk} \arrow[d] \\ BU(n) \times BU(k) \arrow[r, "Bs"] & BU(nk) \end{tikzcd}$$

3. Описать индуцированный гомоморфизм когомологий $Br^* \colon H^*(BT^{nk}) \to H^*(BT^n \times BT^k)$.

Для комплексного расслоения ξ с базой B и корнями Черна $t_1, \ldots, t_n$ рассмотрим размерностно-неоднородный элемент $\mathrm{ch}(\xi) := e^{t_1} + \cdots + e^{t_n} \in H^{2*}(B; \mathbb{Q})$ (он корректно определен, поскольку выражение симметрично по t_i). Этот элемент называется характером Черна расслоения ξ.

Упражнение 6.32. Докажите, что характер Черна задает мультипликативный гомоморфизм из $K(B)$ в $H^{2*}(B; \mathbb{Q})$. Иными словами, $\mathrm{ch}(\xi \oplus \eta) = \mathrm{ch}(\xi) + \mathrm{ch}(\eta)$ и $\mathrm{ch}(\xi \otimes \eta) = \mathrm{ch}(\xi) \cdot \mathrm{ch}(\eta)$.

Список литературы

[1] G.E.Bredon, *Topology and geometry.*

[2] J.Munkres, *Elements of algebraic topology.*

[3] А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, *Курс гомотопической топологии.*

[4] А.Хатчер, *Алгебраическая топология.*

[5] М.Хирш, *Дифференциальная топология.*

[6] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко, *Современная геометрия.*

[7] Дж.Милнор, Дж.Сташеф, *Характеристические классы.*

[8] В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике.*

[9] M.Hirzebruch, T.Berger, R.Jung, *Manifolds and modular forms.*

[10] I.Bárány, *A short proof of Kneser's conjecture*, Journal of Combinatorial Theory, ser.A (25), 1978.