Дифференциальная геометрия
Листок 1
7 февраля 2017 г.

Параметризация $\tau \mapsto \gamma(\tau)$ кривой в евклидовом пространстве называется *натуральной*, если $|\dot\gamma| = |\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}| \equiv 1$. Для натуральной параметризации $d\tau$ — элемент длины на кривой и выполняется $(\dot\gamma, \ddot\gamma) = 0$. Величина $k = |\ddot\gamma|$ (вычисленная в натуральной параметризации) называется *кривизной кривой* γ; *радиусом кривизны* называется обратная величина $R = \frac{1}{k}$.

1. Определите кривизну а) окружности радиуса R; б) параболы $y = ax^2$; в) винтовой кривой $(a\cos t,\ a\sin t,\ b\,t)$.

2. Выведите формулу для кривизны кривой в произвольной параметризации а) на плоскости; б) в $\mathbb{R}^3$.

   Из всех окружностей, касающихся кривой на плоскости в данной точке, наибольший порядок касания (по крайней мере кубический) имеет окружность, радиус которой равен радиусу кривизны. Центр такой окружности называется *центром кривизны*. Множество центров кривизны образует кривую, которую, в зависимости от контекста, называют *эволютой*, *каустикой*, или *фокальным множеством*.

3. Докажите, что эволюта является огибающей семейства нормалей.

4. Докажите, что эволюта имеет особенности (в общем случае, полукубического типа) в точках, соответствующих экстремумам (локальным максимумам и минимумам) кривизны.

5. Для заданной кривой γ на евклидовой плоскости и точки q той же плоскости обозначим через S_q функцию на кривой, заданную квадратом расстояния до точки q, $S_q(t) = |\gamma(t) - q|^2$. Докажите:
   а) $S'(t) = 0 \Leftrightarrow$ точка q лежит на нормали к кривой в точке $\gamma(t)$;
   б) $S'(t) = S''(t) = 0 \Leftrightarrow$ точка q является центром кривизны (принадлежит эволюте кривой);
   в) $S'(t) = S''(t) = S'''(t) = 0 \Leftrightarrow$ точка q является особой точки эволюты.

6. Изобразите фокальное множество а) параболы б) эллипса.
   Для кривой в $\mathbb{R}^3$ ее *репер Френе* образован единичным касательным вектором v, вектором единичной нормали n и вектором бинормали b, дополняющим первые два до ортонормированной тройки. Уравнения Френе описывают движение этого репера вдоль кривой:
   $$\dot v = k\,n, \qquad \dot n = \kappa\,b - k\,v, \qquad \dot b = -\kappa\,n.$$
   Величина κ называется *кручением*.

7. Найдите кручение (и кривизну) кривых
   а) $(a\cos t, a\sin t, bt)$;
   б) $e^t(\cos t, \sin t, 1)$;
   в) $(t^3 + t, t^3 - t, \sqrt{3}t^2)$;
   г) $3x^2 + 15y^2 = 1$, $z = xy$.

8. Опишите кривые с постоянными кривизной и кручением.

Дифференциальная геометрия
Листок 2
14 февраля 2017 г.

Для поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной параметрически $r = r(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2))$, коэффициенты *римановой метрики* (первой квадратичной формы) $g = g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}du_2^2$ задаются равенствами

$$g_{ij} = (r_i, r_j), \quad r_i = \frac{\partial r}{\partial u_i}.$$

Альтернативно, метрику можно найти подстановкой в $dx^2+dy^2+dz^2$ выражений для дифференциалов координатных функций x, y, z выбранной параметризации поверхности.

Величины, для вычисления которых достаточно знать риманову метрику, относят к *внутренней геометрии* поверхности. В частности, к внутренней геометрии поверхности относятся вычисления длин, углов и площадей. Например, *элемент площади* задается 2-формой $\sigma = \sqrt{|\det g|}du_1 \wedge du_2$.

Коэффициенты *второй квадратичной формы* поверхности $h = h_{11}du_1^2 + 2h_{12}du_1du_2 + h_{22}du_2^2$ задаются равенствами

$$h_{ij} = (r_{ij}, n) = -(r_i, \tfrac{\partial n}{\partial u_j}), \qquad r_{i,j} = \frac{\partial r_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j},$$

где $n = \frac{r_i \times r_j}{|r_i \times r_j|}$ — вектор единичной нормали к поверхности.

Главные кривизны $\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения $\det(h - \lambda g) = 0$.

Гауссова кривизна $K = \lambda_1\lambda_2 = \frac{\det h}{\det g}$, *средняя кривизна* $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

1. Определите риманову метрику, вторую квадратичную форму, гауссову и среднюю кривизны для следующих поверхностей:
   а) сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

   б) параболоид вращения $z = a\,(x^2 + y^2)$;

   в) тор $\big((R + r\cos\varphi)\cos\psi,\ (R + r\cos\varphi)\sin\psi,\ z = r\sin\varphi\big)$;

   г) поверхность Эннепера $\big(u - \frac{u^3}{3} + u\,v^2,\ v - \frac{v^3}{3} + v\,u^2,\ u^2 - v^2\big)$.
2. Вычислите кривизну кривой, высекаемой на поверхности плоскостью, проходящей через ее нормаль и имеющей угол θ с одним из ее главных направлений.

«Блистательная теорема» Гаусса (**Theorema Egregium**) утверждает, что, в отличие от средней кривизны, *гауссова кривизна относится к внутренней геометрии поверхности*, то есть может быть выражена через коэффициенты римановой метрики (и их частные производные).

Один из возможных способов найти гауссову кривизну по римановой метрике состоит в следующем. Пусть на двумерной поверхности задана риманова метрика. Выделяя полный квадрат, представим (локально, в окрестности какой-либо точки) метрику в форме

$$g = u_1^2 + u_2^2$$

для некоторых 1-форм u_1 и u_2.
2-*форма площади* выражается через них по формуле

$$\sigma = u_1 \wedge u_2.$$

Определим функции α_1, α_2 и 1-*форму связности* α равенствами

$$du_1 = \alpha_1 \, \sigma, \quad du_2 = \alpha_2 \, \sigma, \qquad \alpha = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2.$$

Дифференцируя, получаем 2-*форму кривизны* $d\alpha$. Из нее получаем *кривизну* K *метрики* из соотношения

$$d\alpha = -K \, \sigma.$$

Теорема. 1. *Кривизна K метрики, определенная выше, не зависит от выбора 1-форм u_1 и u_2.*
2. *В случае, когда метрика на поверхности задается вложением поверхности в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, K совпадает с гауссовой кривизной.*

3(а-г). Вычислите приведенным способом кривизну метрик задачи 1 и поверьте, тем самым, справедливость теоремы для этих поверхностей.

Дифференциальная геометрия
Листок 3
21 февраля 2012 г.

Пусть $v(t) \in T_{\gamma(t)}S$ — поле касательных векторов, заданное вдоль кривой γ на поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$. Поле v называется *параллельным* (ковариантно постоянным), если производная $\frac{dv}{dt}$ (покомпонентная) ортогональна касательной плоскости поверхности в каждой точке кривой, $\frac{dv}{dt} \perp T_{\gamma(t)}S$. Это условие задает *параллельный перенос касательных векторов вдоль кривых* на римановой поверхности. Вот основные свойства операции параллельного переноса:

— Для евклидовой плоскости эта операция совпадает с обычным параллельным переносом.

— Параллельный перенос не зависит от параметризации кривой, но зависит, вообще говоря, от выбора кривой, соединяющих две данные точки.

— Параллельный перенос сохраняет длины векторов, и, более общим образом, скалярное произведение.

— *Операция параллельного переноса относится к внутренней геометрии и однозначно определяется метрикой на поверхности.*

— Если две поверхности касаются друг друга вдоль кривой, то параллельный перенос вдоль этой кривой для обеих поверхностей совпадает.

— В частности, *разверткой* поверхности вдоль данной кривой называется поверхность с плоской (т.е. евклидовой) метрикой, касающаяся исходную поверхность вдоль данной кривой. Параллельный перенос на поверхности совпадает с параллельным переносом на ее развертке.

Если в некотором ортогональном базисе e_1, e_2 касательных полей данное поле имеет вид $v = v_1(t)\, e_1 + v_2(t)\, e_2$, то параллельный перенос задается дифференциальным уравнением

$$\frac{dv_1}{dt} = \alpha(\gamma')\, v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\alpha(\gamma')\, v_1,$$

где α — 1-форма, при помощи которой определялась кривизна метрики и $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}$ — вектор скорости движения по кривой. Если же записать поле v в виде $v = \rho(t)\big(\cos(\varphi(t))\, e_1 + \sin(\varphi(t))\, e_2\big)$, то уравнение параллельного переноса приобретает вид

$$\rho = \mathrm{const}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\alpha(\gamma').$$

В частности, при обходе вдоль замкнутой петли, ограничивающей односвязную область D, касательный вектор поворачивается на угол

$$\Delta\varphi = \oint \frac{d\varphi}{dt} dt = -\int_{\partial D} \alpha = \int_D K\sigma.$$

1. Вычислите параллельный перенос на сфере вдоль ее меридиана тремя разными способами: а) геометрически при помощи развертки, представляющей собой квадратичный конус, касающийся сферы вдоль меридиана, б) выписывая и решая дифференциальное уравнение параллельного переноса, и в) вычисляя площадь сферической области, ограниченной меридианом.

Отображение Гаусса $M \to S^2$ сопоставляет точке на поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ единичный нормальный вектор в этой точке. Касательная плоскость T_xM к поверхности параллельна касательной плоскости сферы $T_{G(x)}S^2$ в точке образа отображения Гаусса. Следовательно, эти две плоскости можно отождествить и считать, что производная G_* отображения Гаусса действует из касательной плоскости в себя.

2. Докажите следующие свойства отображения Гаусса:
   а) Собственные векторы производной G_* совпадают с главными направлениями поверхности, а собственные значения равны $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$ соответственно, где λ_1 и λ_2 — главные кривизны. Соответственно, гауссова кривизна совпадает с определителем производной гауссова отображения.
   б) Параллельный перенос векторов на поверхности вдоль кривой совпадает с параллельным переносом векторов на сфере вдоль образа кривой при гауссовом отображении.
   в) Форма кривизны на поверхности равна $K\sigma = G^*\Sigma$, обратному образу формы площади Σ на сфере. В частности, имеет место равенство $\int_M K\,\sigma = 4\,\pi\,d$, где $4\pi = \int_{S^2}\Sigma$ — площадь сферы, а d — степень гауссова отображения.
3. Выберите какое-нибудь вложение поверхности рода g в пространство и вычислите степень Гауссова отображения для этого вложения.

Дифференциальная геометрия
Листок 4
28 февраля 2017 г.

1. Вычислите кривизну следующих метрик:
а) $dx^2 + \sin^2 x\, dy^2$;

б) $dx^2 + \operatorname{sh}^2 x\, dy^2$;

в) $dx^2 + x^2\, dy^2$;

г) $\dfrac{4\,(dx^2 + dy^2)}{(1 + k(x^2 + y^2))^2}$;

д) $dx^2 + 2\,\cos\omega\, dx\, dy + dy^2$, где $\omega = \omega(x, y)$ — гладкая функция;

е) метрики, представленной в *конформном виде* $e^{g(x,y)}\,(dx^2 + dy^2)$, где $g(x, y)$ — некоторая гладкая функция;

ё) $A^2\, dx^2 + B^2\, dy^2$, где $A = A(x, y) > 0$ и $B = B(x, y) > 0$ — гладкие функции.

Теорема. *Риманова метрика на поверхности евклидова тогда и только тогда, когда её кривизна K тождественно обращается в ноль.*

Для нахождения евклидовых координат евклидовой метрики полезно использовать следующую лемму (которая доказывает также первое утверждение теоремы предыдущего листочка).

Лемма. *Пусть ортонормированный репер 1-форм $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ получен из репера u_1, u_2 поворотом на угол ψ, зависящий от точки поверхности:*

$$\tilde{u}_1 = \cos\psi\; u_1 + \sin\psi\; u_2, \qquad \tilde{u}_2 = -\sin\psi\; u_1 + \cos\psi\; u_2.$$

Тогда форма связности $\tilde{\alpha}$ для этого репера выражается через форму связности α исходного репера при помощи соотношения

$$\tilde{\alpha} = \alpha + d\psi.$$

В частности, если $K \equiv 0$, то есть $d\alpha = 0$, то форма α является (локально) дифференциалом функции. Выбрав функцию ψ из соотношения $d\psi = -\alpha$, мы получаем $\tilde{\alpha} = 0$, то есть $d\tilde{u}_1 = d\tilde{u}_2 = 0$. Следовательно, $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ являются дифференциалами функций. Эти функции и служат искомыми евклидовыми координатами.

2. Докажите, что следующие метрики евклидовы. Найдите евклидовы координаты.
а) $dx^2 + x^2\, dy^2$;

б) $\dfrac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2)^2}$;

в) первая квадратичная форма на конусе $z^2 = x^2 + y^2$ в его гладких точках;

г) $dx^2 + 2\,\cos(x+y)\, dx\, dy + dy^2$.

Дифференциальная геометрия
Листок 5
7 марта 2017 г.

Теорема Гаусса-Бонне для замкнутой поверхности M утверждает равенство

$$\int_M K\sigma = 2\,\pi\,\chi(M),$$

где $\chi(M) = 2 - 2g$ – эйлерова характеристика. Обобщение этой формулы для (компактной) поверхности с (кусочно-гладким) краем имеет следующий вид

$$\int_M K\sigma = 2\,\pi\,\chi(M) - \sum \theta_i - \int_{\partial M} k_g d\ell,$$

где θ_i — внешние углы изломов края, то есть углы, на которые скачком меняется направление касательного вектора при проходе излома, $d\ell$ — элемент длины на кривой ∂M, k_g — геодезическая кривизна, определенная ниже.

Пусть кривая γ лежит на поверхности в $\mathbb{R}^3$. Ее *нормальной* k_n и *геодезической* k_g кривизнами называются длины ортогональной проекции вектора $\ddot{\gamma}$, вычисленного в нормальной параметризации, на нормальную прямую и касательную плоскость поверхности, соответственно. По теореме Пифагора, $k^2 = k_n^2 + k_g^2$. В отличие от нормальной, геодезическая кривизна однозначно определяется метрикой, то есть является объектом внутренней геометрии поверхности, $k_g = |\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}|$.

1. Докажите, что нормальная кривизна кривой зависит только от направления ее касательной. Вычислите нормальную кривизну кривой, образующей угол θ с одним из главных направлений поверхности.

2. Вычислите нормальную и геодезическую кривизны а) окружности радиуса r на сфере радиуса R; б) кривой на *гиперболическом параболоиде* $z = x\,y$, высекаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

   Кривая на поверхности называется *геодезической*, если ее геодезическая кривизна равна нулю.

3. Докажите, что сумма углов треугольника, стороны которого составлены из геодезических, равна π плюс суммарная его гауссова кривизна.

Плоскостью Лобачевского называется верхняя пола $z > 0$ двуполостного гиперболоида $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, снабженная метрикой, полученной ограничением на эту поверхность формы $dx^2 + dy^2 - dz^2$.

4. Докажите, что это действительно метрика (т.е. положительно определенная форма). Найдите ее выражение в *псевдосферических* координатах

$$x = \operatorname{sh}\varphi\ \cos\psi, \quad y = \operatorname{sh}\varphi\ \sin\psi, \quad z = \operatorname{ch}\varphi.$$

5. Модель Клейна плоскости Лобачевского — ее центральная проекция из начала координат на плоскость $z = 1$. Найдите выражение для метрики плоскости Лобачевского в модели Клейна.

6. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского — ее центральная проекция из точки $(0, 0, -1)$ на плоскость $z = 0$. Найдите выражение для метрики плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре.

7. Рассмотрим единичный диск модели Пуанкаре плоскости Лобачевского и отобразим его на верхнюю полуплоскость при помощи голоморфной функции $x + i\,y \mapsto f(x + i\,y)$, где $f(w) = -i\frac{w+i}{w-i}$. Найдите метрику получившейся модели плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости.

8. Определите кривизну плоскости Лобачевского (в какой-либо, а следовательно, любой из приведенных ее моделей).

Не существует изометрического вложения всей плоскости Лобачевского в евклидово трехмерное пространство. Однако плоскость Лобачевского можно вложить локально

9. Пусть поверхность S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ образована вращением графика функции $z = f(x)$ вокруг оси Oz. Определите уравнение на эту функцию, при которой поверхность имеет постоянную кривизну -1. Найдите решение этого уравнения, убывающее к нулю при $x \to \infty$. Построенная поверхность постоянной отрицательной кривизны называется *псевдосферой Бельтрами.*

Дифференциальная геометрия
Листок 6
14 марта 2017г.

Пусть ∇ – связность в $T\mathbb{R}^n$, задаваемая покоординатным дифференцированием векторных полей, рассматриваемых как вектор-функции.

1. Для $n = 2$, найдите производную $\nabla_u v$, где $u = u^1\partial_\rho + u^2\partial_\varphi$ и $v = v^1\partial_\rho + v^2\partial_\varphi$, в полярных координатах на плоскости. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля в этих координатах.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность. Определим связность в TM следующим образом: ковариантная производная векторного поля задается композицией его покоординатной производной как трехкомпонентной вектор-функции с последующей ортогональной проекцией на касательную плоскость.

2. Для случая, когда M — единичная сфера, найдите производную $\nabla_u v$ для $u = u^1\partial_\varphi + u^2\partial_\psi$, $v = v^1\partial_\varphi + v^2\partial_\psi$, в сферических координатах. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля в этих координатах.

Пусть M — риманова поверхность. *Риманова связность* в TM задается формулами $\nabla_\xi e_1 = \alpha(\xi)\ e_2$, $\nabla_\xi e_2 = -\alpha(\xi)\ e_1$, где e_1 и e_2 — ортонормированный базис касательных векторных полей и α — 1-форма, построенная при доказательстве блистательной теоремы Гаусса.

3. Определите матрицу связности и символы Кристоффеля римановой связности в координатах (x, y) для метрики $g = dx^2 + 2\cos\omega\, dx\, dy + dy^2$, где $\omega(x, y)$ — некоторая функция.

Дифференциальная геометрия
Листок 7
21 марта 2017 г.

Кривизна связности — линейное преобразование R, действующее в слоях расслоения и зависящее билинейным и кососимметричным образом от пары касательных векторов на базе. Вот различные его эквивалентные интерпретации:
1) *Действие на сечениях*:

$$R(\xi,\eta) = \nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}$$

2) *Представление в тривиализации* как матрица 2-форм (*структурное уравнение Картана*):

$$R = dA + A \wedge A.$$

3) *Координатное представление*

$$R(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell})^i_j = R^i_{jk\ell} = \frac{\partial \Gamma^i_{j\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{j\ell} - \Gamma^i_{m\ell}\Gamma^m_{jk}.$$

4) Как *инфинитезимальная голономия*: параллельный перенос слоев расслоения по периметру параллелограмма со сторонами $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta$ равен

$$\mathrm{Id} - \varepsilon^2 R(\xi,\eta) + o(\varepsilon^2).$$

1. Докажите, что действующий на сечения оператор определения 1) коммутирует с умножением на функции, и, тем самым, действительно определяет линейное преобразование слоев расслоения.

2. Вычислите кривизну связностей задач 1,2,3 предыдущего листка.

Теорема. *Если R — матрица кривизны римановой связности на поверхности* (см. задачу 3 предыдущего листка)*, то матрица gR кососимметрическая. Кривизна метрики выражается через* $(1,2)$*-компоненту $R_{1212}\, dx^1 \wedge dx^2$ матрицы gR по формуле*

$$K = \frac{R_{1212}}{\det g}.$$

3. Проверьте равенство теоремы для метрик задач 1,2,3 предыдущего листка.

Пусть M — поверхность в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим связность в тривиальном расслоении $M \times \mathbb{R}^3 \to M$ задаваемую покоординатным дифференцированием сечений, рассматриваемых как трехкомпонентные вектор-функции. Кривизна этой связности равна, очевидно, нулю.

4. Пользуясь деривационными формулами, запишите матрицу этой связности в базисе, состоящем из ортонормированных касательных полей e_1, e_2 и единичного нормального вектора $e_3 = n$ поверхности. Вычислите матрицу кривизны этой связности и приравняйте ее нулю. Выпишите получившиеся уравнения (они называются *уравнениями Майнарди-Петерсона-Кодацци*; они выражают необходимые и достаточные условия того, что данная пара квадратичных форм на поверхности реализуется локально как первая и вторая форма некоторого вложения в $\mathbb{R}^3$).

Операции над сечениями тензорных расслоений и их координатное представление

Тензор $T = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\partial_{x^{i_1}}\otimes\dots\otimes dx^{j_q}$, т.е. сечение тензорного расслоения $(TM)^{\otimes p}\otimes(T^*M)^{\otimes q}$	Набор n^{p+q} функций $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x)$
Его представление в новом базисе $T = \overline{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\partial_{y^{i_1}}\otimes\dots\otimes dy^{j_q}$	Правила замены координат $\overline{T}^{k_1\dots k_p}_{l_1\dots l_q}=T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}}$
Изоморфизм перестановки $T^{\otimes 2}M\to T^{\otimes 2}M\colon\ u\otimes v\mapsto v\otimes u$	Операция перестановки индексов $T^{ij}\mapsto T^{ji}$
Риманова структура $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$	Симметрическая положительно определенная матрица g_{ij}. Матрица g^{ij} — ей обратная: $g_{ij}g^{jk}=\delta^k_i$
Изоморфизм $T_xM\to T^*_xM\colon\ v\mapsto g_x(v,\cdot)$ и его продолжение на тензоры более высоких рангов	Операции (взаимно обратные) поднятия и опускания индексов $T^{iI}_J\mapsto\overline{T}^I_{jJ}=g_{ij}T^{iI}_J$ и $T^I_{jJ}\mapsto\overline{T}^{iI}_J=g^{ij}T^I_{jJ}$
След оператора $f\in\mathrm{Hom}(TM,TM)\cong T^*M\otimes TM$, $u\otimes a\mapsto u(a)$	Операция свертки $T^i_j\mapsto T^i_i$
и его обобщение $T^*M\otimes TM\otimes E\to E\colon\ u\otimes a\otimes w\mapsto u(a)\,w$	$T^{iI}_{jJ}\mapsto\overline{T}^I_J=T^{iI}_{iJ}$
Матрица связности A из 1-форм, ее компоненты $\alpha^i_j=\Gamma^i_{jk}\,dx^k$	Символы Кристоффеля Γ^i_{jk}
Ковариантная производная $\nabla s=ds+A\,s,\quad$ или $\nabla_\xi s^ie_i=(\partial_\xi s^i+\alpha^i_j(\xi)\,s^j)\;e_i$ $d(u,v)=(\nabla u,v)+(u,\nabla v)$, $\nabla u\otimes v=(\nabla u)\otimes v+u\otimes(\nabla v)$	$\nabla_kT^i=\frac{\partial T^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{jk}T^j$, $\nabla_kT_j=\frac{\partial T_j}{\partial x^k}-\Gamma^i_{jk}T_i$, $\nabla_kT^I_J=\frac{\partial T^I_J}{\partial x^k}-T^I_{jj_2\dots j_q}\Gamma^j_{j_1k}-\dots-T^I_{j_1\dots j_{q-1}j}\Gamma^j_{j_qk}+$ $T^{ii_2\dots i_p}_J\Gamma^{i_1}_{ik}+\dots+T^{i_1\dots i_{p-1}i}_J\Gamma^{i_p}_{ik}$
Матрица связности в другой тривиализации $e'_i=b^j_ie_j$, $A'=b^{-1}db+b^{-1}Ab$	Преобразование символов Кристоффеля при заменах координат $x^i\rightsquigarrow y^{i'}$, $\Gamma^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i}(\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial y^{k'}}+\frac{\partial^2x^i}{\partial y^{j'}\partial y^{k'}})$
Связность Леви-Чивиты на TM $g\,A=\frac12\Vert dg_{ij}-\partial_iq_j+\partial_jq_i\Vert\ (q_i=g_{ik}dx^k)$	$\Gamma^i_{jk}=\frac12g^{il}(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j})$
Тензор кручения $T(\xi,\eta)=\nabla_\xi\eta-\nabla_\eta\xi-[\xi,\eta]$	$T^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}-\Gamma^i_{jk}$
Тензор кривизны $R=dA+A\wedge A=R^i_{jkl}dx^k\otimes dx^l$ $R(\xi,\eta)=\nabla_\xi\nabla_\eta-\nabla_\eta\nabla_\xi-\nabla_{[\xi,\eta]}$	$R^i_{jkl}=\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jl}-\Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}$ $R(\xi,\eta)=R^i_{jkl}\xi^k\eta^l$

Дифференциальная геометрия
Листок 8
28 марта 2017 г.

Теорема. *Связность плоская тогда и только когда, когда ее кривизна тождественно равна нулю.*

1. Пусть связность в расслоении ранга 1 на плоскости задана (1×1) матрицей 1-форм а) $A = (y\,dx - x\,dy)$ и б) $A = (y\,dx + x\,dy)$. Найдите ковариантно постоянное продолжение сечения $s(0,0) = 1$ в начале координат в точку $(1,1)$ вдоль следующих кривых: прямолинейного отрезка; ломаной $(0,0)$—$(1,0)$—$(1,1)$; ломаной $(0,0)$—$(0,1)$—$(1,1)$.

2. Докажите, что связность в расслоении ранга 3 над двумерной базой с координатами (x,y) и следующей матрицей 1-форм плоская. Найдите базис ковариантно постоянных сечений.

$$A = \begin{pmatrix} -dy & dx - x\,dy & xy\,dx - x\,dy \\ 0 & 0 & -y\,dx + dy \\ 0 & 0 & dx \end{pmatrix}$$

3. Пусть A — матрица связности задачи 1 листка 6 (в полярных координатах на плоскости). Напишите условие ковариантной постоянности сечений. Постройте базис ковариантно постоянных сечений и докажите, тем самым, что эта связность плоская.

Связность ∇ в расслоении E определяет естественную связность ∇^* в двойственном расслоении E^* условием

$$\partial_\xi(u,s) = (\nabla^*_\xi u, s) + (u, \nabla_\xi s),$$

где u и s — сечения расслоений E^* и E соответственно. Аналогично, связности ∇^E и ∇^F в расслоениях E и F определяют связность в расслоении $E \otimes F$ условием

$$\nabla_\xi e \otimes f = (\nabla^E_\xi e) \otimes f + e \otimes (\nabla^F_\xi f).$$

4. Как связаны между собой матрицы связности в некотором расслоении и ассоциированной связности в двойственном расслоении в двойственных базисах?

5. Выразите через символы Кристоффеля ковариантную производную $\nabla_k\, g_{i,j}$ римановой метрики, рассматриваемой как сечение расслоения $(T^*M)^{\otimes 2}$.

Дифференциальная геометрия
Листок 9
4 апреля 2017 г.

Теорема. *В касательном расслоении к риманову многообразию имеется естественная связность (называемая* связностью Леви-Чивиты*), однозначно определяемая двумя требованиями: 1) согласованность с римановой структурой и 2) симметричность.*

Символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты (в базисе координатных векторных полей) задаются равенствами

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\Big(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j}\Big).$$

Эквивалентным образом, матрица A связности Леви-Чивиты находится из соотношения

$$gA = \frac{1}{2}(dg + q), \qquad q_{ij} = -\partial_i g_j + \partial_j g_i,$$

(слагаемые в скобках описывают симметричную и кососимметричную компоненты матрицы), где $g_i = g(\partial_{x_i}, \cdot)$ — 1-форма, двойственная i-му координатному векторному полю; ее коэффициенты образованы i-м столбцом (или строкой) матрицы g, а ∂_i — покомпонентная производная соответствующих 1-форм.

1. Докажите эквивалентность следующих условий согласованности с метрикой:
— индуцированная связность в двойственном расслоении E^* совпадает с исходной при отождествлении E и E^*, задаваемом метрикой;
— для произвольных двух сечений u, v и векторного поля ξ выполняется равенство
$$\partial_\xi(u, v) = (\nabla_\xi u, v) + (u, \nabla_\xi v);$$
— матрица связности кососимметрична *в ортогональном базисе*;
— ковариантная производная метрики, рассматриваемой как тензорное поле, равно нулю;
— параллельный перенос является ортогональным преобразованием (т.е. сохраняет скалярное произведение).

2. Докажите, что условие симметричности метрики $\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi = [\xi, \eta]$ равносильно симметрии символов Кристоффеля $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ в *базисе координатных векторных полей.*

3. Докажите, что из ковариантной постоянности 1-формы симметричной связности вытекает ее замкнутость.

4. Вычислите символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты в *ортонормированном* базисе векторных полей $e_1, ..., e_n$ через коэффициенты попарных коммутаторов $[e_i, e_j] = c^k_{i,j} e_k$.

5. Действуя в базисе координатных векторных полей, вычислите связность Леви-Чивиты (т.е. символы Кристоффеля или матрицу 1-форм), а также кривизну (при помощи формулы теоремы из листка 7) для следующих метрик:
а) евклидовой метрики на плоскости в полярных координатах;
б) метрики на единичной сфере в сферических координатах;
в) метрики на псевдосфере в псевдосферических координатах;
г) метрики на параболоиде вращения в евклидовом пространстве;
д) для метрики $g = dx^2 + 2\cos\omega\, dx\, dy + dy^2$, где $\omega(x, y)$ — произвольная гладкая функция.