Топология-3, семинар 1, 10.02.2017.

Задача 1. Вычислить гомологии и когомологии k-мерного остова n-мерного симплекса, где $0 < k \leqslant n$. Тот же вопрос для k-мерного остова n-мерного куба.

Задача 2. Пусть X, Y — CW-комплексы. Докажите, что существует естественная гомотопическая эквивалентность $\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee X * Y$. Если R — поле, то

$$\widetilde{H}_n(X * Y; R) \cong \bigoplus_{i+j=n-1} \widetilde{H}_i(X; R) \otimes \widetilde{H}_j(Y; R).$$

Задача 3. Пусть X, Y — связные CW-комплексы с отмеченными точками. Докажите, что $H^i(X \vee Y) \cong H^i(X) \oplus H^i(Y)$ при $i \geqslant 1$, а произведение когомологических классов $\phi \in H^i(X) \subset H^i(X \vee Y)$ и $\psi \in H^j(Y) \subset H^j(X \vee Y)$ равно нулю при $i, j \geqslant 1$.

Задача 4. Описать кольцо когомологий поверхности M_g (сферы с g ручками). Указание: построить отображение из M_g в букет g копий двумерного тора.

Задача 5. Пусть $x \in X$. Группа $H_i(X, X \backslash x; R)$ называется группой i-х локальных гомологий пространства X в точке x.

(а) Докажите, что группы локальных гомологий являются локальным инвариантом, то есть зависят лишь от сколь угодно малой окрестности точки $x \in X$.

(б) Вычислите группы локальных гомологий пространства $\mathbb{R}^n$ в произвольной точке.

(в) Вычислите группы локальных гомологий конечного графа в каждой его точке.

Задача 6.* Пусть X — стягиваемый n-мерный симплициальный комплекс с m вершинами. Каково максимальное возможное число n-мерных симплексов у такого симплициального комплекса?

Задача 7. Описать ориентирующие накрытия бутылки Клейна и $\mathbb{R}P^n$ при $n \geqslant 1$.

Задача 8. Если X — некомпактное связное многообразие размерности n, то $H_j(X) = 0$ при всех $j \geqslant n$.

Задача 9. Пусть K — триангуляция топологического (или гомологического) многообразия, $\dim K = n$, и пусть J — симплекс размерности k. Для каждого максимального симплекса I, содержащего J, рассмотрим его грань, противоположную J (т.е. грань, вершины которой не содержатся в J). Обозначим эту грань символом $I \backslash J$. Объединение симплексов $I \backslash J$ по всем I, содержащим J, называется линком симплекса J. Докажите, что (1) Линк является размерностно однородным пространством размерности $n - \dim J - 1$.

(2) Линк имеет гомологии как у сферы размерности $n - \dim J - 1$.

(3) Линк симплекса размерности $n - 2$ гомеоморфен окружности.

(4) Линк является гомологическим многообразием.

Задача 10. Докажите, что связное триангулированное гомологическое многообразие сильно связно (от любого максимального симплекса до любого другого можно добраться переступая через грани коразмерности 1).