Топология-3, семинар 6, 17.03.2017.

Задача 1.* Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — корни Черна расслоения ξ, а $t'_1, \ldots, t'_k$ — корни Черна расслоения η над той же базой. Докажите, что набор $\{t_i + t_j\}_{\substack{i\in[n]\\ j\in[k]}}$ является набором корней Черна расслоения $\xi \otimes \eta$.

Задача 2. Вычислить классы Черна комплексного многообразия $\mathbb{C}P^n$.

Задача 3. Доказать теорему Люка: пусть p — простое число, $a, b > 0$, $\overline{\ldots a_2 a_1 a_0}$ — p-ичная запись a, $\overline{\ldots b_2 b_1 b_0}$ — p-ичная запись b. Тогда $\binom{a}{b} \equiv \prod_i \binom{a_i}{b_i} \mod p$.

Задача 4. (а) При каких k $w(\mathbb{R}P^k) = 1$? (б) При каких k $w_k(\mathbb{R}P^k) \neq 0$? (в) Доказать, что если $n+1 = 2^r m$, где m нечетно, то на $\mathbb{R}P^n$ не существует 2^r линейно независимых полей.

Задача 5. Докажите, что тор T^n можно вложить в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Задача 6. (а) Докажите, что если M^n может быть погружено в $\mathbb{R}^{n+1}$, то каждый класс $w_i(M)$ является степенью класса $w_1(M)$. (б) Докажите, что погружаемость $\mathbb{R}P^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ влечет $n = 2^k - 1$ или $n = 2^k - 2$.

Задача 7. (а) Докажите, что класс $w_1(M) \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$ имеет следующее описание: это класс, значение которого на петле (1-мерном цикле) равно $1 \in \mathbb{Z}_2$, если обход по петле меняет ориентацию, и $0 \in \mathbb{Z}_2$, если обход сохраняет ориентацию. (б) Описать классы Штифеля–Уитни бутылки Клейна и сферы с g ручками.

Задача 8. Пусть M — гладкое замкнутое связное многообразие, $\dim M = n$. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — набор гладких векторных полей общего положения, и $S \subset M$ — множество точек, в которых поля линейно зависимы. Докажите, что S — гладкое подмногообразие размерности $n - 1$, и гомологический класс $[S] \in H_{n-1}(M, \mathbb{Z}_2)$ Пуанкаре двойственнен к $w_1(M) \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$.

Задача 9.* Докажите, что множество точек многообразия M, в которых s векторных полей общего положения линейно зависимы, Пуанкаре двойственно классу $w_{n-s+1}(M)$.

Задача 10.* Пусть K — триангуляция гладкого замкнутого связного многообразия M. Докажите, что остовы барицентрического подразбиения K определяют гомологические классы M, Пуанкаре двойственные к классам Штифеля–Уитни касательного расслоения.