

Топология-3, семинар 7, 24.03.2017.

Задача 1.* (а) Пусть $U(n) \hookrightarrow O(2n)$ естественное вложение групп. Описать индуцированный гомоморфизм $H^*(BO(2n); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(BU(n); \mathbb{Z}_2)$. (б) Вычислить классы Штифеля–Уитни многообразия CP^n .

Задача 2. Найти числа Бетти и описать кольцо когомологий комплексного грассманиана $G_{4,2}$.

Задача 3. Пусть $G_{m,n}$ — грассманиан комплексных n -плоскостей в \mathbb{C}^m , а γ_n — его каноническое расслоение. Докажите, что $TG_{m,n} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n, \gamma_n^\perp)$, и аналогично в вещественном случае.

Задача 4. Пусть $F_n = F_{n,1,2,\dots,n}$ — многообразие полных флагов в \mathbb{C}^n . Докажите, что $H^*(F_n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]/(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где $\deg t_i = 2$, а σ_j — j -ый элементарный симметрический многочлен от t_i (положите $t_i = c_1(\xi_i)$, где ξ_i — i -ое каноническое расслоение над флагом и воспользуйтесь рецептом, приведенным на лекции для грассманиана).

Задача 5. Опишите кольцо когомологий произвольного многообразия комплексных флагов F_{m,j_1,\dots,j_n} , $1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq m$.

Задача 6. (а) Элемент $p(\eta_1 \oplus \eta_2)$ сравним с $p(\eta_1)p(\eta_2)$ по модулю элементов порядка 2. (б) Пусть ξ — комплексное расслоение. Тогда $(\xi_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \xi \oplus \bar{\xi}$. Вывести отсюда, что для комплексных расслоений выполнено

$$1 - p_1(\xi) + p_2(\xi) - p_3(\xi) + \dots = (1 - c_1(\xi) + c_2(\xi) - c_3(\xi) + \dots)(1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + c_3(\xi) + \dots)$$

Задача 7. Вычислите классы Понтрягина многообразия CP^n .

Задача 8. Связной суммой $M \# N$ многообразий M и N одной размерности называется многообразие, получаемое вырезанием маленьких дисков из M и N и склеиванием по полученной границе. Докажите, что $M \# N$ бордантно $M \sqcup N$.

Задача 9. Перечислить все замкнутые поверхности, которые не являются границами 3-мерных многообразий (все может быть неориентируемым).