Билинейные формы и диаграммы Дынкина

1.1. Найдите размерность пространства **а)** симметрических; **б)** кососимметрических билинейных форм (над полем k, $\operatorname{char} k \neq 2$).

1.2. **а)** Является ли форма $\operatorname{tr}(AB)$ на $\operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ невырожденной?
б) Какова ее сигнатура?

1.3. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$, заданная матрицей, положительно определена тогда и только тогда, когда все главные угловые миноры этой матрицы положительны (“критерий Сильвестра”).

1.4. Применим к базису x^k пространства многочленов со скалярным произведением $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ оротогонализацию Грама–Шмидта. Докажите, что получатся *многочлены Чебышева* T_k ($T_k(\cos\phi) = \cos k\phi$).

Пусть Γ — граф с конечным числом вершин $\{1,\dots,n\}$. Построим по нему квадратичную форму на $\mathbb{R}^n$:

$$q_\Gamma(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i-j} x_i x_j,$$

где вторая сумма берется по множеству всех ребер графа Γ. Наша цель — выяснить, для каких графов Γ форма q_Γ является положительно определенной.

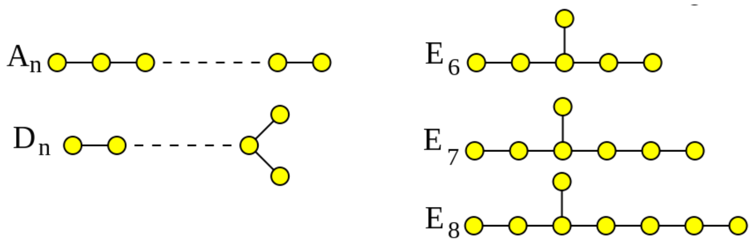
1.5. Если $q_\Gamma > 0$, то граф Γ
а) не содержит циклов (в частности, петель и кратных ребер);
б) не содержит вершин степени 4 и больше;
в) содержит не более одной вершины степени 3.

1.6. Пусть Γ — граф с вершиной степени 3, из которой выходят три «щупальца» длин p, q и r. Покажите, что если $q_\Gamma > 0$, то

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1.$$

Перечислите все тройки (p,q,r), удовлетворяющие этому неравенству.

1.7. Убедитесь, что все графы, для которых $q_\Gamma > 0$, перечислены на рисунке. Они называются *диаграммами Дынкина*[1] и обозначаются A_n ($n \geqslant 1$), D_n ($n \geqslant 4$), E_6, E_7 и E_8. Для каждой из диаграмм Дынкина Γ найдите $\det q_\Gamma$.



[1]Точнее, *диаграммами Дынкина с простыми связями* (simply-laced)