Неравенства Вейля

Пусть V — эрмитово пространство размерности n, и пусть $A\colon V \to V$ — самосопряженный линейный оператор с вещественными собственными значениями $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Пусть $Q = Q_A$ — квадратичная форма, соответствующая A: $Q_A(v,v) = (v, Av)$. Рассмотрим Q как непрерывную функцию на единичной сфере $S = \{v \in V \mid (v,v) = 1\}$.

2.1. Докажите, что $\lambda_1 = \max_{v \in S} Q(v)$, а $\lambda_n = \min_{v \in S} Q(v)$.

2.2 (Теорема Фишера–Куранта). Для всех $1 \leq i \leq n$ имеем

$$\lambda_i = \max_U \min_{v \in U \cap S} Q(v) = \min_W \max_{v \in W \cap S} Q(v),$$

где U и W пробегают множество векторных подпространств V размерности i и $n - i + 1$ соответственно.

2.3. Вычислите дифференциал функции $Q_A(v)$. В каких точках S дифференциал обращается в нуль? Как ведет себя функция $Q_A(v)$ в окрестности этих точек?

Следующий вопрос был сформулирован Г. Вейлем в 1912 году. Полный ответ на него описывается так называемыми гипотезами Хорна, которые были доказаны Клячко, Кнутсоном и Тао в конце 1990-х гг.

Пусть A, B, C — эрмитовы операторы в n-мерном пространстве, и пусть $A + B = C$. Что можно сказать о спектрах (т.е. наборах собственных значений) $\lambda(A)$, $\lambda(B)$, $\lambda(C)$?

Существуют очевидные соотношения, например,

$$\operatorname{tr} C = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B; \tag{1}$$

$$\lambda_1(C) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B). \tag{2}$$

2.4 (неравенства Вейля). Докажите, что

$$\lambda_{i+j-1}(C) \leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B). \tag{3}$$

2.5. Докажите, что при $n = 2$ неравенства (1)–(3) необходимы и достаточны для существования эрмитовых матриц A, B, C с указанными свойствами.

2.6. Докажите, что

$$\lambda_2(C) + \lambda_3(C) \leq \lambda_1(A) + \lambda_3(A) + \lambda_1(B) + \lambda_3(B); \tag{4}$$

2.7 (неравенства В. Б. Лидского). Докажите, что для любого $r < n$ и для любого r-элементного подмножества $I \subset \{1, \dots, n\}$ справедливы неравенства

$$\sum_{i \in I} \lambda_i(C) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(B); \qquad \sum_{i \in I} \lambda_i(C) \leq \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(A) + \sum_{i \in I} \lambda_i(B). \tag{5}$$

2.8. Докажите, что при $n = 3$ неравенства (1)–(5) необходимы и достаточны для существования эрмитовых матриц A, B, C с указанными свойствами.