Тензорное произведение и инвариант Дена

4.1. Найдите тензорное произведение абелевых групп:
а) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$; **б)** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$; **в)** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

4.2. Докажите изоморфизм колец **а)** $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}[x]$; **б)** $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{C}$.

Напомним, что классическая теорема Бойяи–Гервина утверждает, что любые два многоугольника равной площади равносоставлены.

Третья проблема Гильберта — это вопрос о том, являются ли куб и правильный тетраэдр равного объема равносоставленными (т е. можно ли куб разрезать на несколько многограников и сложить из них правильный тетраэдр того же объема).

4.3. Пусть прямоугольник P имеет стороны a и b. Обозначим через $D(P)$ элемент $a \otimes b$ в тензорном произведении $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.
а) Если отрезок разбивает прямоугольник P на два, P_1 и P_2, то $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$.
б) Инвариант D аддитивен: если прямоугольник P разбит на прямоугольники P_i, то $D(P) = \sum D(P_i)$.
в) Прямоугольник 1×2 нельзя разрезать на конечное число прямоугольников и сложить из них квадрат $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$.

Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через ℓ_i длины его ребер, а через α_i величины соответствующих двугранных углов. *Инвариантом Дена* многогранника P называется элемент $\mathrm{Dehn}(P) := \sum \ell_i \otimes \frac{\alpha_i}{\pi}$ пространства $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$.

4.4. **а)** Если плоскость разбивает многогранник P на два многогранника, P_1 и P_2, то $\mathrm{Dehn}(P) = \mathrm{Dehn}(P_1) + \mathrm{Dehn}(P_2)$.
б) Инвариант Дена аддитивен: если многогранник P разбит на многогранники P_i, то $\mathrm{Dehn}(P) = \sum \mathrm{Dehn}(P_i)$.
в) Инварианты Дена двух равносоставленных многогранников равны.

4.5. Решите третью проблему Гильберта.

Инвариант Дена придумал ученик Гильберта Макс Ден (Max Dehn) в конце XIX – начале XX века (по всей видимости, третья проблема Гильберта была решена еще до того, как Гильберт сформулировал свой список проблем). Через 60 с лишним лет после этого швейцарский математик Жан-Пьер Сидле (Jean-Pierre Sydler) доказал и обратное утверждение: если два многогранника имеют равные объемы и инварианты Дена, то они равносоставлены.