Представления конечных групп I

Все представления в этом листке, про которых не сказано иного, — над полем $\mathbb{C}$.

5.1. Дано представление конечной группы. Докажите, что любой элемент действует диагонализуемой матрицей.

5.2. **а)** Тензорное произведение превращает множество классов изоморфизма 1-мерных представлений группы G в абелеву группу.

б) Если A — конечная абелева группа, то группа из предыдущего пункта изоморфна (неканонически) группе A.

5.3. Любой гомоморфизм группы G в абелеву группу пропускается через группу $G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$, где $[G,G]$ — подгруппа G, *порожденная* всеми выражениями вида $aba^{-1}b^{-1}$.

5.4. Найдите все одномерные представления группы S_n.

5.5. Есть ли у группы S_4 неприводимое двумерное представление?

5.6. Пусть V — некоторое представление группы S_3, $\sigma = (12), \tau = (123) \in S_3$.

а) Докажите, что если $v \in V$ — собственный вектор для τ, отвечающий собственному значению ω, то вектор σv также является собственным вектором для τ с собственным значением $\omega^2 = \omega^{-1}$.

б) Докажите, что в условиях предыдущего пункта подпространство $\langle v, \sigma(v)\rangle$ является подпредставлением группы S_3. (Следствие: размерность неприводимого представления группы S_3 не превышает двух.)

в) Опишите все неприводимые представления группы S_3 с точностью до изоморфизма.

5.7. **а)** Разложите на неприводимые регулярное представление R группы S_3.

б) Пусть V — двумерное представление группы S_3. Покажите, что $\operatorname{Sym}^{k+6} V \cong \operatorname{Sym}^k V \oplus R$.

в) Разложите на неприводимые $\operatorname{Sym}^k V$ для всех k.

5.8. Приведите пример представления конечной группы над полем конечной характеристики, не являющегося вполне приводимым.