Кратные интегралы

1. Вычислите интегралы:
(а) $\int_{[0,1]^n} \max(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$; (б) $\int_{[0,1]^n} \min(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$.
2. Вычислите интегралы Лебега–Стилтьеса:
(а) $\int_0^1 x dc(x)$; (б) $\int_0^1 e^x dc(x)$,
где $c(x)$ — канторова лестница.
3. Приведите пример такой функции $f(x, y)$, что оба двойных интеграла

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$$

существуют и различны.
4. Докажите, что для двойного интеграла

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

оба повторных интеграла существуют и величины их совпадают, но двойной интеграл не существует.
5. Вычислите интеграл Пуассона $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
(Указание: рассмотрите величину $I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$, запишите ее в виде двойного интеграла и перейдите к полярным координатам.)
6. Используя теорему Фубини и положительность интеграла от положительной функции, дайте простое доказательство равенства

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

в предположении, что смешанные производные непрерывны.
7. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Лебегу на $\mathbb{R}$. Докажите, что *свертка*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x - t) dt$$

существует и интегрируема на $\mathbb{R}$ по Лебегу для почти всех x.

В следующих задачах под вероятностью понимается отношение меры положительных исходов к мере всего пространства исходов.

8. На отрезке $[a, b]$ случайным образом выбираются две точки. Найдите среднее значение M расстояния между ними. Какова вероятность того, что это расстояние больше M?
9. На отрезке $[0, a]$ случайным образом выбираются три числа. Какова вероятность того, что они являются длинами некоторого треугольника?
10. На отрезке $[-a, a]$ случайным образом выбираются две точки u, v.
(а) Что вероятнее: корни уравнения $z^2 + uz + v = 0$ лежат на вещественной оси (вероятность $P_1(a)$) или корни этого уравнения не лежат на вещественной оси (вероятность $P_2(a)$)? К чему стремятся вероятности $P_2(a)$? К чему стремятся вероятности $P_1(a)$, $P_2(a)$ при $a \to +\infty$?
(б) Какова вероятность того, что биквадратное уравнение $z^4 + uz^2 + v = 0$ имеет как вещественные, так и комплексные корни?