Пространство L_2, ряды Фурье

1. (а) Докажите, что функция $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ удовлетворяет аксиомам нормы. (б) Докажите неравенство Коши-Буняковского: $|(u,v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$.

2. Докажите, что нормированное пространство является евклидовым тогда и только тогда, когда для любых векторов u и v выполнено правило параллелограма:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

3. Докажите, что система многочленов Лежандра:

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

образует ортонормированный базис в $L_2[-1,1]$.

4. Проверьте, что система функций $1,\ \cos x,\ \sin x, \dots, \cos nx,\ \sin nx, \dots$ ортогональна в $L_2([-\pi,\pi])$.

5. Покажите, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(*Указание: примените равенство Парсеваля к функции $f(x) = x$ в пространстве $L_2[0,\pi]$ с ортогональной системой* $\{\sin kx,\ k \in \mathbb{N}\}$.)

6. Найдите разложение функции $y = \frac{\pi - x}{2}$ в ряд Фурье на промежутке $[0, 2\pi)$. Постройте график суммы ряда Фурье.

7. С помощью ряда из предыдущей задачи получите формулу для суммы ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

8. Зная коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n функции $f(x)$, имеющей период 2π, по тригонометрической системе задачи 4 в $L_2[-\pi,\pi]$, найдите коэффициенты Фурье

(а) сдвинутой функции $f(x+h)$, $h = \mathrm{const}$;

(б) усредненной функции $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$, $h > 0$.

9. Пусть вещественная функция f непрерывна на отрезке $[0,\pi]$ и имеет на нем производную f', которая принадлежит $L_2[0,\pi]$. Пусть выполнено любое из условий: $\int_0^\pi f(x)dx = 0$ или $f(0) = f(\pi)$. Докажите неравенство:

$$\int_0^\pi (f(x))^2 dx \leqslant \int_0^\pi (f'(x))^2 dx$$

в котором равенство достигается лишь при $f(x) = a\cos x$ или $f(x) = b \sin x$.

10. Пусть $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и $xf(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Докажите, что $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$.