Листок 1. 8 февраля 2017

Задача 1. Нарисовать на плоскости множества а) $arg(1-z) = \frac{3}{4}\pi$; б) $\bar{z} = iz^2$; в) $\bar{z} = iz$; г) $|\frac{z-2i}{z+4}| \geq 1$; д) $\operatorname{Re} z^2 > 1$; $|z-2i+5| = 1$.

Задача 2. Нарисовать на плоскости множества и их образы при отображениях:
$\{z|0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$, $\{z| -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z \leq \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z < 1\}$, $z \mapsto e^z$;
$\{z| \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{6}\}$, $\{z| \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{6}\}$, $z \mapsto \sin z$.

Задача 3. В какие множества переводит отображение $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ прямые и окружности?

Задача 4. Опишите все дробно-линейные отображения, переводящие открытый единичный круг, полуплоскость, в себя?

Задача 5. В каких точках непрерывны (дифференцируемы) функции $\operatorname{Re} z$, $\bar{z}$, $|z^2|$, $arg(z)$.

Задача 6. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$, коэффициенты которого определены рекуррентным соотношением: $a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.
а) Докажите, что его радиус сходимости отличен от нуля.
б) Найдите сумму этого ряда.

Задача 7. Разложите функцию $\frac{1}{1+ix}$ в степенной ряд с центром в точке $a \in \mathbb{R}$. Найдите радиус сходимости этого ряда.

Задача 8. Докажите, что $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...$

Задача 9. Докажите, что $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$ при любом z.