Листок 6. Гамма-функция и дзета-функция.

Примечания: При сдаче задачи n можно пользоваться задачами m с $m < n$. Всюду x^s означает $e^{s(\ln|x|+i\arg(x))}$, где $\arg(x) \in [0, 2\pi)$.

Определим гамма-функцию Эйлера интегралом $\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$.

Задача 1.

а) Вычислите $\Gamma(k+1)$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

б) Докажите, что интеграл сходится при всех $\operatorname{Re} s > 0$ и выполнено равенство $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$.

в) Докажите, что $\Gamma(s)$ допускает мероморфное продолжение во всю комплексную плоскость и полюса этого продолжения просты и расположены в точках $s = -n$ с $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Вычислите вычеты в этих точках.

Задача 2.

а) Докажите, что $\ln\Gamma(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$— выпуклая функция.

б*) Пусть $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_{>0}$— функция, такая, что $f(1) = 1$, $xf(x) = f(x+1)$ и $\ln f(x)$ выпукла. Докажите, что $f(x) = \Gamma(x)$.

Задача 3. Пусть $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty}(1 + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n)$. Докажите, что

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$$

Задача 4. Докажите, что при $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$ справедливо равенство

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Задача 5.

а) Докажите, что
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

б) Вычислите
$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$$

в) Вычислите $|\Gamma(it)|$ для всех вещественных t.

Определим дзета-функцию Римана рядом $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$.
Задача 6. Доказать, что вышенаписанный ряд сходится при $\operatorname{Re} s > 1$ и задаёт голоморфную функцию в этой области.

Задача 7.

а) Вычислите $\zeta(2)$.

б) Не вычисляйте $\zeta(3)$.

в) Вычислите $\zeta(4)$.

г) Вычислите $\zeta(6)$.

(Подсказка: воспользуйтесь задачами 3 и 5а))
Задача 8.
Докажите, что

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1}$$

и

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{z^{s-1}dz}{e^z - 1},$$

где $\rho \in (0, 2\pi)$ и C_ρ— граница $\rho-$окрестности положительного луча, причем интеграл сходится при всех комплексных s.
Задача 9.

а) Доказать, что в окрестности нуля выполнено равенство

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + B_1\frac{z^2}{2!} - B_2\frac{z^4}{4!} + \dots,$$

где B_k— некоторые рациональные числа (они называются *числами Бернулли*)

б) Доказать, что $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ и $\zeta(-2m) = 0$, $\zeta(1-2m) = \frac{(-1)^m B_m}{2m}$ для всех натуральных m.

Задача 10.
Правильным образом продеформировав контур из задачи 8, докажите равенство

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Задача 11.
Используя контурное интегрирование (и задачу 5а)) покажите, что для всех комплексных t выполнено равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi i t x}dx = e^{-\pi t^2}$$

Задача 12.
Пусть $\vartheta(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$, где $x > 0$. Разложив функцию $f(\varphi, x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n+\varphi)^2 x}$ в ряд Фурье как функцию с периодом 1, докажите, что

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\vartheta\left(\frac{1}{x}\right)$$

Задача 13.

а) Докажите, что $\int\limits_0^{+\infty} x^{s/2-1}(\vartheta(x)-1)dx = 2\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$.

б) Докажите, что справедливо равенство

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int\limits_1^{+\infty}(x^{-1/2-s/2} + x^{s/2-1})\frac{\vartheta(x)-1}{2}dx$$

и, стало быть,

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Задача 14.

а) Докажите, что $\zeta(s)$ мероморфна во всем $\mathbb{C}$ и имеет единственный полюс при $s = 1$. Докажите, что он прост.

б) Найдите $\lim\limits_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = A$.

в) Найдите $\lim\limits_{s\to 1}(\zeta(s) - \frac{A}{s-1})$.