Проективная плоскость и проективные прямые

Г11⋄1. Опишите все такие преобразования из PGL_2, что **а)** $\infty \mapsto \infty$ **б)** $(\infty, 0) \mapsto (\infty, 0)$ **в)** $(\infty, 0, 1) \mapsto (0, \infty, 1)$ **г)** $(\infty, 0, 1) \mapsto (1, 0, \infty)$ **д)** $(\infty, 0, 1) \mapsto (\infty, 1, 0)$ и без вычислений выведите из этого равенства $[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_3, p_4]^{-1}$, $[p_1, p_3, p_2, p_4] = 1 - [p_1, p_2, p_3, p_4]$, $[p_1, p_4, p_3, p_2] = \big([p_1, p_2, p_3, p_4] - 1\big)/[p_1, p_2, p_3, p_4]$.

Г11⋄2. Верно ли, что $[p_1, p_2, p_3, p_4] \cdot [p_1, p_2, p_4, p_5] \cdot [p_1, p_2, p_5, p_3] = 1$ для любых пяти различных точек $p_1, p_2, \dots, p_5 \in \mathbb{P}_1$?

Г11⋄3. Докажите для любых восьми различных точек $p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}_1$ равенство

$$[p_1, p_2, q_3, q_4] \cdot [p_2, p_3, q_1, q_4] \cdot [p_3, p_1, q_2, q_4] \cdot [q_1, q_2, p_3, p_4] \cdot [q_2, q_3, p_1, p_4] \cdot [q_3, q_1, p_2, p_4] = 1.$$

Г11⋄4 (теорема Паппа). Пусть точки a_1, b_1, c_1 коллинеарны и точки a_2, b_2, c_2 коллинеарны. Докажите, что точки пресечений прямых $(a_1b_2) \cap (a_2b_1)$, $(b_1c_2) \cap (b_2c_1)$, $(c_1a_2) \cap (c_2a_1)$ тоже коллинеарны.

Г11⋄5. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение к теореме Паппа.

Г11⋄6 (вторая теорема Дезарга). На прямой $\ell \subset \mathbb{P}_2$ заданы три различных точки p, q, r, а вне неё — три различные точки a, b, c. Докажите, что на прямой ℓ тогда и только тогда имеется инволюция, переводящая точки p, q, r в точки пересечения прямой ℓ с прямыми (bc), (ca) и (ab) соответственно, когда три прямые (ap), (bq) и (cr) пересекаются в одной точке.

Г11⋄7. На стене указаны две точки. При помощи линейки, которая короче расстояния между ними, проведите через эти точки прямую.

Г11⋄8. На листе бумаги нарисованы точка A и две прямые, пересекающиеся в точке B вне листа. При помощи одной линейки нарисуйте на листе прямую AB.

Г11⋄9. В стандартной карте $U_0 \subset \mathbb{P}_2$ даны кривые **а)** $y = x^2$ **б)** $y = x^3$ **в)** $y^2 + (x-1)^2 = 1$ **г)** $y^2 = x^2(x+1)$. Напишите их уравнения в картах U_1, U_2 и нарисуйте все 12 аффинных кривых.

Г11⋄10. Вложим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ в качестве действительной части стандартной аффинной карты U_0. **а)** Найдите на $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ две точки, лежащие на всех кониках, видных в $\mathbb{R}^2$ как окружности. **б)** Всякая ли коника, проходящая через эти две точки и имеющая хотя бы 3 неколлинеарные точки в $\mathbb{R}^2$, видна в $\mathbb{R}^2$ как окружность?

Г11⋄11. Рассмотрим над полем $\mathbb{C}$ плоскость $\mathbb{P}_2$ как множество неупорядоченных пар точек (a, b) на $\mathbb{P}_1$ и обозначим через $C \subset \mathbb{P}_2$ конику Веронезе, образованную всеми парами (a, a) совпадающих точек. **а)** Из каких пар точек состоят касательные, опущенные на C из произвольной точки (a, b)? **б)** Покажите, что отображение $\sigma_{(a,b)} : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$, переводящее точку $x \in \mathbb{P}_1$ в такую точку $y \in \mathbb{P}_1$, что 3 пары точек (a, b), $(x, x) \in C$ и $(y, y) \in C$ коллинеарны на $\mathbb{P}_2$, является дробно линейной инволюцией, и найдите её неподвижные точки. Докажите, что любая линейная инволюция на $\mathbb{P}_1$ имеет такой вид, и выведите отсюда зад. Г10⋄11.

Г11⋄12. В условиях зад. Г11⋄11 рассмотрим для произвольной гомографии $\gamma : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ биекцию $\gamma_C : C \xrightarrow{\sim} C$, $(a, a) \mapsto (\gamma(a), \gamma(a))$. Покажите, что **а)** она продолжается до единственного линейного проективного автоморфизма плоскости $\mathbb{P}_2$ **б)** найдутся такие точки $p_1, p_2 \in C$ и прямая ℓ, что $y = \gamma_C(x) \iff$ проекция x на ℓ из p_1 совпадает с проекцией y на ℓ из p_2. **в)** Пусть для заданных точек $a, b, c \in C$ известны их образы при преобразовании γ_C. Одной линейкой постройте такие точки $p_1, p_2 \in C$ и прямую ℓ, как в (б), и неподвижные точки преобразования γ_C.

Г11⋄13*. Одной линейкой постройте треугольник, вписанный в данную гладкую конику C так, что его стороны проходят через три данные точки. Сколько решений бывает у этой задачи?

Г11⋄14*. Сформулируйте и решите задачу, проективно двойственную к предыдущей.

Г11⋄15. Пусть прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_2$ пересекает гладкую конику C в точках r, s. Верно ли, что точка p лежит на поляре точки q относительно C тогда и только тогда, когда $[p, q; r, s] = -1$?

Г11⋄16. Точки $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$ лежат на гладкой конике. Покажите, что ассоциированный с четырёхвершинником $abcd$ треугольник xyz автополярен относительно этой коники.

Персональный табель ______________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок 11 (15 февраля)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9а			
б			
в			
г			
10а			
б			
11а			
б			
12а			
б			
в			
13			
14			
15			
16			