

Игры с кониками

Соглашения и терминология. В этом листке основное поле \mathbb{k} по умолчанию предполагается алгебраически замкнутым с $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$. Желаящие могут считать, что $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Две точки называются *сопряжёнными* относительно гладкой кватрики, если одна из них лежит на поляре другой. Кватрики на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ называются *кониками*, пространство $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ называется *пространством коник*, а прямые и плоскости в нём — *пучками* и *связками* коник. Две прямые на \mathbb{P}_2 называются *сопряжёнными* относительно гладкой коники, если одна из них проходит через полюс другой.

Г12♦1. Каково уравнение гладкой коники C в базисе (e_0, e_1, e_2) , если треугольник $e_0 e_1 e_2$ а) вписан в C б) описан вокруг C в) автополярен относительно C ?

Г12♦2. Могут ли все коники в пучке быть вырожденными? Пусть в пучке есть хоть одна гладкая коника. Может ли в нём быть ровно а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 вырожденных коники?

Г12♦3. Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 е) 5 точкам? Если да, приведите явные, точно описанные примеры.

Г12♦4. Сколько общих касательных может быть у двух гладких коник?

Г12♦5. Сколько коник касается пяти заданных прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Г12♦6. Назовём двойным отношением $[a, b, c, d]$ четырёх точек гладкой коники C двойное отношение четырёх прямых $[(pa), (pb), (pc), (pd)]$ в пучке прямых с центром в какой-либо пятой точке $p \in C$. Покажите, что а) оно не зависит от выбора p б) две хорды коники C тогда и только тогда сопряжены относительно C , когда их концы гармоничны на C в) в зад. Г11♦11,12 двойное отношение точек на \mathbb{P}_1 совпадает с двойным отношением этих же удвоенных точек на конике Веронезе, и все преобразования γ_C сохраняют последнее двойное отношение.

Г12♦7 (инволюции на конике). Пусть в условиях зад. Г11♦11 заданы две различных инволюции $\sigma_1, \sigma_2 : C \rightarrow C$. а) Найдите количество таких точек $p \in C$, что $\sigma_1(p) = \sigma_2(p)$. Покажите, что б) σ_1 и σ_2 коммутируют, если и только если пары их неподвижных точек гармоничны в) три разных инволюции и тождественное преобразование Id_C тогда и только тогда составляют группу Клейна, когда прямые, соединяющие пары их неподвижных точек, образуют автополярный относительно C треугольник.

Г12♦8. Одной линейкой постройте а) пару касательных к данной конике C , проходящих через данную точку $p \notin C$ б) касательную к C в данной точке $p \in C$.

Г12♦9 (теорема Паскаля). Выведите из зад. Г11♦12, что шесть точек p_1, p_2, \dots, p_6 лежат на конике, если и только если три точки пересечения пар противоположных сторон «шестиугольника» p_1, p_2, \dots, p_6 коллинеарны.

Г12♦10 (теорема Брианшона). Покажите, что шесть прямых тогда и только тогда касаются одной коники, когда три «главные диагонали» образованного ими «шестиугольника» пересекаются в одной точке.

Г12♦11. Покажите, что а) всякая коника C , касающаяся двух различных прямых ℓ_1, ℓ_2 , задаёт гомографию $\kappa_C : \ell_1 \xrightarrow{\simeq} \ell_2$, переводящую точку $x \in \ell_1$ в такую точку $y \in \ell_2$, что прямая (xy) касается C б) каждая гомография $\ell_1 \xrightarrow{\simeq} \ell_2$ однозначно представляется в виде κ_C .

Г12♦12* (поризм Понселе для треугольников). Покажите, что два треугольника на \mathbb{P}_2 описаны около одной коники, если и только если они вписаны в одну конику.

Г12♦13*. Покажите, что два треугольника перспективны (см. зад. Г10♦13), если и только если они полярны друг другу относительно некоторой гладкой коники.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
8а			
б			
9			
10			
11а			
б			
12			
13			