Независимый Московский Университет, Алгебраические кривые, весна 2017

4

4.1. Рассмотрите пересечение двух квадрик в $\mathbf{P}_3$, которое зависит от параметра k и в аффинных координатах c, s, d имеет вид

$$\begin{cases} c^2 + s^2 = 1 \\ d^2 + k^2 s^2 = 1. \end{cases}$$

При каких k эта кривая неприводима? Можно воспользоваться результатами следующей задачи.

4.2. Воспользовавшись "тригонометрической" параметризацией ($c = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $s = \frac{2t}{1+t^2}$) кривой из задачи **4.1**, преобразуйте эту кривую в плоскую. Исследуйте её особенности и с помощью квадратичного преобразования преобразуйте её в плоскую кривую с разделёнными касательными.

4.3. Пусть A, B, C – вершины треугольника на вещественной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, а точка P лежит *внутри* этого треугольника. Докажите, что отражения прямых AP, BP и CP относительно *биссектрис*, выходящих из соответствующих вершин, пересекаются в одной точке; обозначим эту точку $\iota(P)$ и будем рассматривать $P \mapsto \iota(P)$ как отображение внутренности треугольника в себя. Это отображение называется *изогональным сопряжением*. Вложив $\mathbb{R}^2$ в проективную плоскость $\mathbf{P}_2(\mathbb{R})$, введите однородные координаты $(x : y : z)$, в которых стороны треугольника задаются уравнениями $x = 0, y = 0$ и $z = 0$. Вычислите изогональное сопряжение ι в этих координатах. В какую точку при изогональном сопряжении переходит ортоцентр?

4.4. Раздуйте на проективной плоскости особую точку *декартово листа*, задаваемого в аффинных координатах уравнением $y^2 = x^3 + x^2$. Знаком ли вам прообраз декартова листа?

4.5. Раздуйте вершину *прямого кругового* конуса.

4.6. Отождествите какую-нибудь гладкую кубику в $\mathbf{P}_3$ с проективной плоскостью, раздутой в 6 точках. **Указание.** Найдя две прямых ℓ_1 и ℓ_2 на какой-нибудь кубике $\mathbf{X} \subset \mathbf{P}_3$, задаваемой простым уравнением вроде $t^3 + x^3 = y^3 + z^3$, постройте геометрически естественный бирациональный изоморфизм $\ell_1 \times \ell_2 \overset{\simeq}{\dashrightarrow} \mathbf{X}$.

4.7. Постройте гомеоморфизм раздутия $\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$ в точке и топологического пространства $\mathbf{P}_2(\mathbb{C})\#\overline{\mathbf{P}_2(\mathbb{C})}$, где $\#$ – знак *связной суммы* ориентированных многообразий, а для комплексного многообразия Z через $\overline{Z}$ обозначено оно же с *противоположной* ориентацией.

6 апреля, *Г.Б. Шабат*