1. i) Вычислить $\int_{\gamma_j}(x^2+iy^2)dz$, $j=1,2$, где $\gamma_1(t)=t^2+it$, а $\gamma_2(t)=t+it$, $t\in[0,1]$; ii) Для произвольного пути γ, соединяющего точки 0 и 1 и не проходящего через $\pm i$, вычислить $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$.

•2. Пусть $D=D(0,R)$, $f\in Hol(D)\cap C(\overline{D})$. Вычислить $\iint_{r\leqslant|z|\leqslant R} f(z)dxdy$.

•3. Пусть $D=D(0,R)$, $f\in Hol(D)\cap C(\overline{D})$ и $M=\max_{|z|=R}|f(z)|$. Доказать, что при $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $|z|<R$ справедливы неравенства:

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right|\leqslant\frac{MR}{(R-|z|)^{n+1}},\qquad |f'(z)|\leqslant\frac{MR}{R^2-|z|^2}.$$

4. Пусть f — целая функция ($f\in Hol(\mathbb{C})$) и для всех $z\in\mathbb{C}$ выполнена оценка $|f(z)|\leqslant C(1+|z|)^p$, где C и $p>0$ — фиксированные константы. Доказать, что f — полином степени не выше p.

5. Пусть функция h голоморфна в некоторой области G, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$ сходится. Доказать, что произведение $\prod_1^\infty(1+c_kh(z))$ сходится в G к *голоморфной* функции.

6. Пусть $P(z)=z^n+\ldots$ — полином степени n с единичным старшим коэффициентом. Доказать, что если $\max_{|z|=1}|P(z)|\leqslant 1$, то $P(z)=z^n$.

•7. Пусть G — некоторая ограниченная область в $\mathbb{C}$, а $f_1,\ldots,f_m\in Hol(G)$. Положим

$$M:=\limsup_{z\to\partial G}(|f(z_1)|+\cdots+|f(z_m)|).$$

Показать, что если хотя бы одна функция f_k — не тождественная константа, то для любой точки $z\in G$ выполнено $|f_1(z)|+\cdots+|f_m(z)|<M$.

•8. Пусть $\gamma(t)\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ — простой замкнутый кусочно-гладкий путь, внутренность носителя которого содержит точку 0. Пусть $z_0=\gamma(0)=\gamma(1)$. Рассмотрим какую-нибудь непрерывную ветвь $L(z)$ функции $\operatorname{Ln} z$ вдоль γ. Для функции $f\in Hol(\overline{D(\gamma)})$ вычислить $\int_\gamma f'(z)L(z)dz$.

9. Вычислив и оценив интеграл $\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$ при $|a|<R$ и $|b|<R$ доказать теорему Лиувилля: ограниченная и голоморфная функция в $\mathbb{C}$ является константой.

10. Пусть G — жорданова область с кусочно-гладкой границей Γ, пусть U — некоторая окрестность Γ, а функция $\varphi\in Hol(U)$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) существует функция $f\in Hol(\overline{G})$ такая, что $f|_\Gamma=\varphi$;

б) для любой точки $a\notin\overline{G}$ выполнено $\int_\Gamma\frac{\varphi(z)\,dz}{z-a}=0$.