Экзамен

Экзамен является домашним. Решения задач необходимо записать и принести 17 мая в 17:30 или сдать в учебную часть до этого срока. Решать задачи необходимо самостоятельно!

Задача 1. Поверхность называется линейчатой, если она параметрически задается в виде $r(u, v) = \rho(u) + va(u)$. Докажите, что на линейчатой поверхности гауссова кривизна всюду неположительна.

Задача 2. Существуют двумерные поверхности, у которых имеется два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости.

Задача 3. Подмногообразие M риманова многообразия N с индуцированной метрикой называется вполне геодезическим, если все геодезические M являются в то же время и геодезическими N. Доказать, что M вполне геодезическое тогда и только тогда, когда вторая квадратичная форма нулевая.

Задача 4. Пусть на поверхности в $\mathbb{R}^3$ заданы полугеодезические координаты, в которых первая квадратичная форма имеет вид: $I = dx^2 + G(x, y)dy^2$. Докажите, что гауссова кривизна равна:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial x^2}.$$

Задача 5. (а) Найдите оператор переноса на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$. Как он зависит от кривой?

(б) На какой угол повернется касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели $\psi = \psi_0$ на угол α?

(в) Для поверхности вращения найдите результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

Задача 6. При каком условии на матрицу оператора A подпространство, заданное условием $p = Aq$, является лагранжевым в стандартном симплектическом пространстве с симплектическими координатами $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$?

Задача 7. Докажите, что

$$\mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n) = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(2n) = U(n).$$