Поверхности в $\mathbb{R}^3$. Первая и вторая квадратичные формы.

Для поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной параметрически $r = r(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2))$, коэффициенты римановой метрики (первой квадратичной формы)

$$I = g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}du_2^2$$

задаются равенствами $g_{ij} = (r_i, r_j)$, $r_i = \frac{\partial r}{\partial u_i}$. Альтернативно, метрику можно найти подстановкой в $dx^2 + dy^2 + dz^2$ выражений для дифференциалов координатных функций x, y, z выбранной параметризации поверхности.

Коэффициенты второй квадратичной формы поверхности

$$II = h_{11}du_1^2 + 2h_{12}du_1du_2 + h_{22}du_2^2$$

задаются равенствами

$$h_{ij} = (r_{ij}, n) = -(r_i, \frac{\partial n}{\partial u_j}), \qquad r_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial u_i \partial u_j},$$

где $n = \frac{r_i \times r_j}{|r_i \times r_j|}$ — вектор единичной нормали к поверхности.

Главные кривизны $\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения $\det(II - \lambda I) = 0$. Гауссова кривизна $K = \lambda_1\lambda_2 = \frac{\det II}{\det I}$, средняя кривизна $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Задача 1. Определите риманову метрику, вторую квадратичную форму, гауссову и среднюю кривизны для следующих поверхностей:

(а) сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

(б) параболоид вращения $z^2 = a(x^2 + y^2)$;

(в) тор $((R + r\cos\varphi)\cos\psi, (R + r\cos\varphi)\sin\psi, z = r\sin\varphi)$;

(г) поверхность Эннепера $(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$.

Задача 2. Вычислите кривизну кривой, высекаемой на поверхности плоскостью, проходящей через ее нормаль и имеющей угол θ с одним из ее главных направлений.