Ковариантная производная, гауссова и средняя кривизны.

Задача 1. Докажите, что поверхность с нулевыми гауссовой и средней кривизнами это плоскость.

Задача 2. Докажите, что единственными поверхностями вращения имеющими нулевую среднюю кривизну являются плоскость и катеноид, получаемый вращением кривой $\left(\frac{\mathrm{ch}(at+b)}{a}, t\right)$.

Задача 3. Докажите, что средняя кривизна есть интегральное среднее всех нормальных кривизн

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi k(\varphi)d\varphi,$$

где $k(\varphi)$ — кривизна нормального сечения, имеющего в проекции на касательную плоскость угол φ с одним из главных направлений.

Задача 4. (а) Найдите ковариантную производную $\nabla_u v$ для $u = u^1\partial_\psi + u^2\partial_\varphi$, $v = v^1\partial_\psi + v^2\partial_\varphi$ в сферических координатах на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

(б) Как выглядят геодезические на сфере?

Задача 5. (а) Докажите, что если $\gamma(t)$ — геодезическая, то $\gamma_C(t) = \gamma(Ct)$, $C \in \mathbb{R}$ — тоже геодезическая. (б) Докажите, что гладкая кривая $\gamma(t)$ на поверхности $r : U \to \mathbb{R}^3$ является геодезической, если и только если в каждой точке кривой вектор нормали к кривой ортогонален к поверхности.