НМУ, Дифференциальная геометрия Листок 4. 8 марта 2018 г.

Риманова метрика, геодезические линии

Задача 1. Найдите геодезические на (а) цилиндре; (б) круговом конусе в $\mathbb{R}^3$.

Задача 2. Выведите уравнение экстремалей функционала:

$$I(\gamma(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))dt \longrightarrow \text{extr},$$

если $\gamma(t_0) = x_0$, $\gamma(t_1) = x_1$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$.

Задача 3. Докажите, что длина окружности и площадь круга малого радиуса ε на римановой поверхности (двумерном римановом многообразии) имеют вид

$$L(\varepsilon) = 2\pi\varepsilon + A\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3), \qquad S(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2 + B\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4).$$

Выразите константы A и B через гауссову кривизну.

Псевдосферой, или *плоскостью Лобачевского*, называется одна из компонент (скажем $z > 0$) двуполостного гиперболоида $z^2 - x^2 - y^2 = 1$. Метрика на псевдосфере задается ограничением на нее *псевдоевклидовой* метрики $dx^2 + dy^2 - dz^2$. Центральная проекция из точки $(0, 0, -1)$ переводит псевдосферу в круг $x^2 + y^2 < 1$ (модель Пуанкаре). Дробно-линейное преобразование $w = i\frac{1-z}{1+z}$, переводит круг $|z|^2 < 1$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \mathrm{w} > 0$ (модель Клейна).

Задача 4. Убедитесь, что квадратичная форма на псевдосфере, заданная таким образом, положительно определена и является, тем самым, метрикой. Вычислите метрику на плоскости Лобачевского во всех трех моделях и найдите ее кривизну.