Связность

Задача 1. Покажите, что оператор

$$R(\xi, \eta) = \nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]},$$

действующий на сечения, коммутирует с умножением на функции, и, тем самым, определяет линейное преобразование слоев расслоения.

Введем ковариантный дифференциал

$$d^\nabla \left(T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) = \nabla_{\partial_i} T_{i_1 \ldots i_k} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Задача 2. Докажите, что квадрат дифференциала d^∇ — это оператор умножения на форму кривизны:

$$\left(d^\nabla\right)^2 \omega = \Omega \wedge \omega.$$

Задача 3. Пусть $r : U \to \mathbb{R}^3$ — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$, x, y — координаты на поверхности. Докажите, что

$$\partial_{r_y} \partial_{r_x} - \partial_{r_x} \partial_{r_y} = R(r_x, r_y),$$

где ∂_v — производная вдоль вектора v в $\mathbb{R}^3$.

Задача 4. (а) Определите матрицу связности и символы Кристоффеля римановой связности в координатах (x, y) для метрики $g = dx^2 + 2\cos\omega dxdy + dy^2$, где $\omega(x, y)$ — некоторая функция.

(б) Вычислите кривизну этой связности.