Теорема Дарбу

Пусть $< \cdot, \cdot >$ — невырожденное кососкалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n}$.

Задача 1. (а) Докажите, что для всех $x \neq 0$ подпространство $x^\perp \overset{def}{=} \{y \in \mathbb{R}^n \mid \, < x, y >= 0\}$ имеет размерность $2n-1$, содержит вектор x, и $x^\perp = y^\perp \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0,\, x = \lambda y$.

(б) Докажите, что в $\mathbb{R}^{2n}$ существует базис $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ такой, что $< q_i, q_j >=< p_i, p_j >= 0$ при всех i, j, $< q_i, p_j >= 0$ при $i \neq j$ и $< q_i, p_i >= 1$.

В дальнейшем через ω будем обозначать симплектическую форму на многообразии M размерности $2n$, т.е. $d\omega = 0$ и для всех $x \in M$ $\omega(x)$ — невырожденное кососкалярное произведение в T_xM.

Задача 2. Докажите, что последнее условие эквивалентно тому, что (внешняя) степень ω^n нигде не обращается в нуль.

Отсюда следует, что симплектическое многообразие ориентируемо.

Задача 3. Докажите (используя предыдущую задачу), что симплектическая форма на компактном многообразии не может быть точной: $\omega = d\alpha$ невозможно.

Отсюда следует, например, что на четырехмерной сфере (у которой $H^2(S^4) = 0$) не существует симплектической структуры.

Задача 4. (а) Докажите, что 2-форма $\omega = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{1+|z|^2}$ на $\mathbb{C}$ продолжатся до симплектической структуры на $\mathbb{C}P^1$.

(б) Докажите, что формула $g(x)(v_1, v_2) = \omega(x)(iv_1, v_2)$ (где $v_1, v_2 \in T_x\mathbb{C}P^1$) задает на $\mathbb{C}P^1$ риманову метрику, и вычислите подгруппу в группе проективных преобразхований $\mathbb{C}P^1$, относительно которой эта метрика инвариантна.

Рассуждения в последующих задачах происходят в малой окрестности точки $x \in M$, поэтому можно считать, что все происходит в окрестности нуля в $\mathbb{R}^{2n}$, и $\omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \omega^{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$. Обозначим $\omega_0 = \omega^{ij}(0) dx_i \wedge dx_j$.

Задача 5. Докажите, что в достаточно малой окрестности нуля все формы $\omega_t = t\omega + (1-t)\omega_0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, являются симплектическими формами.

Задача 6. (а) Докажите, что в окрестности нуля существует векторное поле X_t такое, что $di_{X_t}\omega_t = -\frac{d\omega_t}{dt}$.

(б) Докажите, что если φ_t — поток (т.е., интегральные траектории) поля X_t, то $\varphi_t^* \omega_t \equiv \omega_0$.

(в) Докажите теорему Дарбу: в достаточно малой окрестности любой точки многообразия M существуют координаты $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ такие, что $\omega = dq_1 \wedge dp_1 + \dots + dq_n \wedge dp_n$.