НМУ
Алгебра 2

7 февраля 2018
Листок 1

Двойственность

Если кольцо A некоммутативно, то различают *левые* A-модули (где действие $A \times M \to M$ удовлетворяет условию $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 \cdot a_2) \cdot m$) и *правые* A-модули (где действие $M \times A \to M$ удовлетворяет условию $(m \cdot a_1) \cdot a_2 = m \cdot (a_1 \cdot a_2)$).
Пусть M, N — два левых (или два правых) модуля. Через $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ обозначим множество гомоморфизмов A-модулей из M в N. Введём на $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ сложение формулой $(f_1 + f_2)(m) := f_1(m) + f_2(m)$. Введём на $\mathrm{Hom}_A(M, M)$ умножение формулой $(f_1 \cdot f_2)(m) := f_1(f_2(m))$.

Задача 1. Покажите, что относительно введённых операций

a) $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ является абелевой группой по сложению;

b) $\mathrm{End}_A(M) := \mathrm{Hom}_A(M, M)$ является кольцом;

c) M является левым $\mathrm{End}_A(M)$-модулем;

d) $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ является правым $\mathrm{End}_A(M)$-модулем и левым $\mathrm{End}_A(N)$-модулем.

Задача 2. Пусть кольцо A коммутативно. Покажите, что $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ является A-модулем с умножением $(a \cdot f)(m) := a \cdot f(m) = f(a \cdot m)$.

Определение 1. Определим двойственный модуль формулой

$$M^* := \mathrm{Hom}_A(M, A).$$

Его элементы (гомоморфизмы $M \to A$) называются *функционалами.*

Задача 3. a) Пусть M — левый A-модуль. Покажите, что M^* — правый A-модуль с умножением $(f \cdot a)(m) := f(m) \cdot a$.

b) Пусть M — свободный конечно порождённый модуль с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Тогда M^* — свободный конечно порождённый с *двойственным* базисом $e^1, \ldots, e^n$, где $e^i \colon M \to A$ — функционалы, для которых $e^i(e_j) = 0$ при $i \neq j$, $e^i(e_i) = 1$. В частности, в этом случае $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} M^*$.

Определим отображение $i_M \colon M \to M^{**}$ формулой

$$(i_M(m))(f) := f(m),$$

где $m \in M,\ f \in M^*$.

Задача 4. a) Покажите, что i_M — гомоморфизм модулей.

b) Покажите, что i_M — изоморфизм, если M свободный конечно порождённый.
Приведите примеры, в которых i_M c) не инъективно, d) не сюръективно.

Пусть $u \colon M \to N$ гомоморфизм модулей. Определим *двойственное* отображение $u^* \colon N^* \to M^*$ формулой (где $g \in N^*$, $m \in M$)

$$(u^*(g))(m) := g(u(m)).$$

Задача 5. a) Покажите, что соответствие $u \mapsto u^*$ задаёт гомоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(N^*, M^*).$$

Докажите, что: b) $(uv)^* = v^* u^*$, c) $u^{**} \circ i_M = i_N \circ u$.

d) Проверьте, что в двойственных базисах матрица u^* есть транспонированная к матрице u.

Далее будем считать, что $A = \mathrm{k}$ — поле, а все векторные пространства конечномерны.

Определение 2. Пусть V, U, W — векторные пространства. Напомним, что отображение $V \times U \xrightarrow{\langle -,- \rangle} W$ называется *билинейным*, если оно линейно по каждому аргументу. Билинейное отображение $V \times U \to \mathrm{k}$ называется *спариванием.* Спаривание называется *невырожденным по первому аргументу*, если из $\langle v, u \rangle = 0$ при всех u следует $v = 0$. Аналогично определяется невырожденность по второму аргументу. Спаривание называется *невырожденным*, если оно невырожденно по обоим аргументам.

Пример невырожденного спаривания: $V \times V^* \to \mathrm{k}$, $\langle v, f \rangle := f(v)$.

Задача 6. a) Покажите, что спаривание задаёт линейные отображения $V \to U^*$ и $U \to V^*$, двойственные друг другу.

b) Покажите, что для невырожденного спаривания эти отображения суть изоморфизмы.

Определение 3. Для спаривания $V \times U \to \mathrm{k}$ определим его *левое ядро* как

$$\ker_V := \{v \in V \mid \forall u \in U \ \langle v, u \rangle = 0\} \subset V,$$

аналогично определим *правое ядро* $\ker_U \subset U$.

Задача 7. Покажите, что спаривание $V \times U \to \mathrm{k}$ индуцирует спаривание
$V/\ker_V \times U/\ker_U \to \mathrm{k}$, и проверьте, что оно невырождено.

Определение 4. Пусть дано спаривание $V \times U \to \mathrm{k}$. Для подпространства $V' \subset V$ определим его *ортогонал* $(V')^\perp \subset U$:

$$(V')^\perp := \{u \in U \mid \forall\, v' \in V' \ \langle v', u \rangle = 0\}.$$

Задача 8. Для невырожденного спаривания $V \times U \to \mathrm{k}$ покажите, что

a) операция $\perp$ задаёт взаимно обратные биекции между подпространствами в V и в U,

b) при этом $\dim((V')^\perp) = \operatorname{codim} V'$ и $V' \subset V'' \iff (V'')^\perp \subset (V')^\perp$.

В частности, $\perp$ задаёт биекцию между подпространствами в V и в V^*.

Задача 9. Пусть $u \colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение, а $u^* \colon V_2^* \to V_1^*$ — двойственное отображение. Покажите, что

a) $\mathrm{im}\,(u^*) = (\ker u)^\perp$; $\ker(u^*) = (\mathrm{im}\, u)^\perp$;

b) $\operatorname{rank} u = \operatorname{rank} u^*$.