Тензорное умножение

Задача 1. Вычислите $G_1 \otimes_{\mathbb{Z}} G_2$, где G_1, G_2 — циклические абелевы группы.

Задача 2. Пусть R — коммутативное кольцо, а $M' \subset M$ и N — R-модули.

a) Приведите пример, когда естественное отображение $M' \otimes N \to M \otimes N$ не инъективно.

b) Докажите, что $(M/M') \otimes N \cong (M \otimes N)/(M' \otimes N)$.

Задача 3°. Пусть R – коммутативное кольцо, M – R-модуль, а $I \subset R$ – идеал. Определим IM как подмодуль в M, порождённый элементами $im, i \in I, m \in M$.

a) Докажите, что $M \otimes_R (R/I) \cong M/IM$.

b) Всегда ли $IM \cong I \otimes_R M$?

c) Опишите $R/I \otimes_R R/J$, где $I, J \subset R$ – идеалы.

Определение 1. Пусть R — кольцо, M — правый R-модуль, N — левый R-модуль. Тензорное произведение $M \otimes_R N$ определяется как факторгруппа свободной абелевой группы с базисом $e_{m,n}, m \in M, n \in N$, по подгруппе, порождённой всеми элементами вида

$$e_{m,n_1+n_2} - e_{m,n_1} - e_{m,n_2}, e_{m_1+m_2,n} - e_{m_1,n} - e_{m_2,n}, e_{ma,n} - e_{m,an}\, (a \in R).$$

Задача 4. Дайте определение $M \otimes_R N$ при помощи универсального свойства (для случая некоммутативного кольца).

Пусть $f\colon R \to S$ — гомоморфизм колец. Кольцо S можно рассмотреть как левый и как правый R-модуль при помощи умножения $r \cdot s := f(r)s$, $s \cdot r := sf(r)$. Кроме того, f позволяет рассмотреть любой S-модуль N как R-модуль: $r \cdot n := f(r) \cdot n$.

Задача 5 (Расширение скаляров). Пусть $f\colon R \to S$ — гомоморфизм колец, а M — левый R-модуль. $a°$) Введите на $S \otimes_R M$ структуру левого S-модуля.

b) Введите на $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ структуру левого S-модуля.

Пусть M — левый R-модуль, а N — левый S-модуль. Постройте изоморфизмы

$c°$) $\mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, N)$; d) $\mathrm{Hom}_R(N, M) \cong \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(S, M))$.

Определение 2. Пусть R, S — кольца, а M — абелева группа. M называют R-S-бимодулем, если заданы отображения $l\colon R \times M \to M$ и $r\colon M \times S \to M$, такие что M есть левый R-модуль относительно l, правый S-модуль относительно r и l коммутирует с r, т.е. $\forall r \in R, m \in M, s \in S$ верно $(r \cdot m) \cdot s = r \cdot (m \cdot s)$.

Задача 6. a) Пусть M_1 — S-R_1-бимодуль, а M_2 — S-R_2-бимодуль. Проверьте, что $\mathrm{Hom}_S(M_1, M_2)$ является R_1-R_2-бимодулем.

b) Пусть M_1 — R_1-S-бимодуль, а M_2 — S-R_2-бимодуль. Проверьте, что $M_1 \otimes_S M_2$ является R_1-R_2-бимодулем.

c) Сформулируйте и докажите, что тензорное умножение модулей над некоммутативными кольцами ассоциативно.

Задача 7. Тензоры типа $(1, 2)$ – это билинейные отображения $V \times V \to V$, т.е. умножения на V. a) Запишите для тензора $\sum a^i_{jk} e_i \otimes e^j \otimes e^k$ условия коммутативности, ассоциативности, условие того, что e_1 – единица. b) Запишите в координитах тензоры, соответствующие $\mathbb{R}$-алгебрам $\mathbb{C}$ и $M_2(\mathbb{R})$. $c°$) Опишите умножение на $\mathbb{R}^3$, заданное тензором

$$\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma e_{\sigma(1)} \otimes e^{\sigma(2)} \otimes e^{\sigma(3)}.$$