НМУ
Алгебра 2

14 марта 2018
Листок 5

Тензоры

В задачах этого листка мы считаем, что V – конечномерное векторное пространство над полем характеристики 0.

Задача 1. a) Докажите, что $T^kV = S^kV \oplus \Lambda^kV \oplus A^k(V)$, где $A^k(V) = \ker \mathrm{Alt} \cap \ker \mathrm{Sym}$. b) Напишите соответствующее разложение для тензора $e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_4$.

c) Какова размерность $A^k(V)$?

Для $x \in T^kV$, $\xi \in T^lV^*$ при $k \geqslant l$ определим $x \vdash \xi$ как последовательную свёртку $x \otimes \xi$ по $(1,1),(2,2),\ldots,(l,l)$ индексам, это элемент $T^{k-l}V$.
Пусть $x \in \Lambda^kV$.

Задача 2. a°) Пусть векторы $v_1,\ldots,v_r$ линейно независимы. Тогда $\forall i\ x \wedge v_i = 0 \iff x = v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \wedge \ldots$. b°) Пусть ковекторы $f_1,\ldots,f_r$ линейно независимы. Тогда $\forall i\ x \vdash f_i = 0 \iff x \in \Lambda^k(\langle f_1,\ldots,f_r\rangle^\perp)$.
Напомним, что элемент $x \in \Lambda^kV$ *разложим*, если $x = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ для некоторых $v_1,\ldots,v_k \in V$.

Задача 3. a°) Докажите, что 2-вектор x разложим $\iff x \wedge x = 0$.

b) Докажите, что все тензоры в $\Lambda^{n-1}V$ разложимы, где $n = \dim V$.

Рангом $x \in \Lambda^kV$ называется минимальное d такое, что $x \in \Lambda^kU$, где $U \subset V$ – d-мерное подпространство. Определим $\mathrm{Ann}\, x = \{f \in V^* \mid x \vdash f = 0\}$.

Задача 4. a) Докажите, что $\mathrm{rank}\, x = k \iff x$ разложим, в противном случае $\mathrm{rank}\, x > k$. b°) Докажите, что $\mathrm{rank}\, x + \dim \mathrm{Ann}\, x = \dim V$. c) Как связаны ранг кососимметрической матрицы (a_{ij}) и ранг 2-вектора $\sum a_{ij} e_i \otimes e_j$? d) Каким может быть ранг 2-вектора? e) Пусть $x \in \Lambda^kV, y \in \Lambda^lU$. Чему равен ранг $x \wedge y \in \Lambda^{k+l}(V \oplus U)$? При $k = l$, чему равен ранг $x + y \in \Lambda^k(V \oplus U)$? f^*) Каким может быть ранг k-вектора?

Задача 5. a) Докажите, что отображения $x\vdash -\colon V^* \to \Lambda^{k-1}V$ и $x\vdash -\colon \Lambda^{k-1}V^* \to V$ двойственны друг другу (с точностью до знака). b) Как связан ранг этих отображений с рангом x? c) Докажите, что x разложим $\iff (x \vdash \xi) \wedge x = 0$ для любого $\xi \in \Lambda^{k-1}V^*$.
Квадратичные уравнения $(x \vdash \xi) \wedge x = 0$, задающие множество разложимых k-векторов, называются *уравнениями Плюккера.*

Обозначим $M := (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \otimes_Z \mathbb{R}$. *Инвариантом Дена* $D(P)$ выпуклого многогранника P называется элемент M, равный

$$\sum_{e\ -\ \text{ребро}\ P} \alpha(e) \otimes l(e),$$

где $\alpha(e)$ обозначает двугранный угол при ребре e, а $l(e)$ — длину ребра e.
Два многогранника называют *равносоставленными*, если один можно разрезать на несколько частей и из них составить другой.

Задача 6. a) Пусть многогранник P разрезан на несколько многогранников $P_1,\ldots,P_n$. Покажите, что $D(P) = D(P_1) + \ldots + D(P_n)$.

b) Покажите, что инвариант Дена любого куба равен нулю.

c^*) Покажите, что элемент $x \otimes y \in M$ равен нулю тогда и только тогда, когда $x \in \pi \cdot \mathbb{Q}$.

d^*) Покажите, что инвариант Дена правильного тетраэдра не равен нулю.

Тем самым, правильный тетраэдр не равносоставлен никакому кубу. В действительности, два многогоранника равносоставлены тогда и только тогда, когда имеют равные объёмы и инварианты Дена.