

Характеры

В этом листочке предполагается, что основное поле — поле комплексных чисел.

Задача 1. Выразите характеры представлений $\rho \oplus \tau$, ρ^* , $\text{Hom}(\rho, \tau)$ и $\rho \otimes \tau$ через χ_ρ и χ_τ .

Задача 2.

Составьте таблицу характеров для неприводимых представлений следующих групп:

- a) S_4 b) A_4 ; c) Q ;
d) D_n , где n нечётно; e) D_n , где n чётно.

Задача 3. Разложите, пользуясь таблицей характеров, на неприводимые компоненты следующие представления:

- a) S_4 в пространствах функций на вершинах и на рёбрах куба;
b) A_4 в пространствах функций на вершинах и на рёбрах куба;
c) S_3 в пространстве однородных многочленов степени n от двух переменных при представлении S_3 движениями треугольника;
d) S_4 в пространстве кубических форм на \mathbb{C}^3 при представлении S_4 вращениями куба.

Кольцо представлений $R(G)$ группы G над полем k определяется следующим образом. Как группа это фактор свободной абелевой группы, порождённой классами изоморфизма конечномерных представлений G над k , по соотношениям $[V] - [U] - [W] = 0$, где $U \subset V$ — подпредставление, а W — соответствующее факторпредставление. Умножение на образующих определено так: $[V] \cdot [U] := [V \otimes U]$.

Задача 4. а) Докажите, что умножение в кольце представлений определено корректно.

б) Докажите, что кольцо представлений — ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей. Есть ли в нём делители нуля?

в) Докажите, что кольцо представлений — свободная абелева группа, базис которой образуют классы изоморфизма неприводимых конечномерных представлений.

Задача 5. Вычислите кольцо представлений для следующих групп:

- a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; b) S_3 ; c) S_4 ;
d) D_n , где n нечётное; e) D_n , где n чётное.

Задача 6. Докажите, что при $n \geq 2$

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \frac{\lambda_1^2}{2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \cdot \dots \cdot \lambda_n!} = 2,$$

где сумма берётся по всем решениям в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ уравнения $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n$.

Подсказка: как устроены классы сопряжённости в S_n ?