# Алгебраические числа

**Задача 1.** Найдите степень следующих алгебраических чисел над $\mathbb{Q}$:
$a^\circ$) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;
b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;
$c^\circ$) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$;
d) $\sqrt[12]{1}$ (первообразный корень);
e) $\sqrt[n]{2}$.

**Задача 2.** Пусть $f \in \mathrm{k}[x]$ — неприводимый многочлен степени 3 над полем k характеристики ноль, а $K$ — поле разложение многочлена $f$ над k.
$a^\circ$) Докажите, что $[K:\mathrm{k}]=3$ или 6.
Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in K$ — корни $f$, а $\delta=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)$. Докажите, что
b) $\delta^2 \in \mathrm{k}$,
$c^\circ$) $\delta \in \mathrm{k} \Longleftrightarrow [K:\mathrm{k}]=3$.
d) Пусть $f(x)=x^3+px+q$. Выразите $\delta$ через $p$ и $q$.
e) Какова степень поля разложения многочленов $x^3+x+1$, $x^3-4x+1$, $x^3-36x-72$ над $\mathbb{Q}$?

**Задача 3.** Пусть $p_1,\ldots,p_n>0$ — различные простые целые числа.
Положим $K=\mathbb{Q}[\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_n}]$.
a) Докажите, что существует автоморфизм $\sigma$ поля $K$ над $\mathbb{Q}$ такой, что $\sigma(\sqrt{p_i})=\sqrt{p_i}$ при $i=1,\ldots,n-1$ и $\sigma(\sqrt{p_n})=-\sqrt{p_n}$.
b) Докажите, что $[K:\mathrm{k}]=2^n$. Подсказка: воспользуйтесь индукцией.

Пусть $\mathrm{k}\subset K$ — конечное расширение полей. След $\mathrm{tr}_{K/\mathrm{k}}(\alpha)$ и норма $\mathrm{nm}_{K/\mathrm{k}}(\alpha)$ элемента $\alpha\in K$ определяются как след и определитель линейного оператора умножения на $\alpha$ на k-векторном пространстве $K$.

**Задача 4.** a) Пусть $K=\mathrm{k}[\alpha]$. Как связаны минимальный многочлен $\alpha$ над k и характеристический многочлен умножения на $\alpha$ на k-векторном пространстве $K$?
b) Для произвольного конечного расширения $\mathrm{k}\subset K$ выразите $\mathrm{tr}_{K/\mathrm{k}}(\alpha)$ и $\mathrm{nm}_{K/\mathrm{k}}(\alpha)$ через минимальный многочлен $\alpha$ над k.
c) В случае характеристики ноль покажите, что форма $K\times K\to \mathrm{k}\colon\ (x,y)\mapsto \mathrm{tr}_{K/\mathrm{k}}(xy)$ билинейна над k и невырождена.