Листок 2.

Число $I = \int_a^b f(x)\,dx$ называется интегралом Римана от функции f по $[a,b]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого разбиения $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ с масштабом $\lambda(T) = \max_i |x_i - x_{i-1}| < \delta$ и всяких отмеченных точек $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ верно неравенство $|I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)|\Delta_i|| < \varepsilon$. Здесь $|\Delta_i| = |x_i - x_{i-1}|$. Кратко это определение записываем так $I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)|\Delta_i|$.

Далее используем обозначение χ_E для индикатора множества E.

Задача 1. (a) Докажите, что интегрируемая по Риману функция ограничена.

(b) Докажите, что функция Дирихле $\chi_{\mathbb{Q}}$ на $[a,b]$ не интегрируема по Риману.

(c) Докажите, что функция χ_S, где S – отрезок, интервал или полуинтервал, интегрируема по Риману на $[a,b]$.

Задача 2. Докажите, что интеграл Римана $I(f)$ функции f по отрезку $[a,b]$ является линейным и монотонным по f: $I(\lambda f) = \lambda I(f), \quad I(f+g) = I(f) + I(g), \quad f \geq 0 \Longrightarrow I(f) \geq 0$.

Задача 3. (a) Докажите, что если функции f_n интегрируемы по Риману на $[a,b]$ и последовательность f_n равномерно сходится к f на $[a,b]$, то f интегрируема на $[a,b]$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Покажите на примере, что равномерную сходимость нельзя заменить поточечной.

(b) Докажите, что непрерывные функции интегрируемы по Риману.

(c) Приведите пример интегрируемой по Риману функции, которая не является равномерным пределом простых функций, т.е функций вида $\sum_{j=1}^m c_j \chi_{\Delta_j}$, где Δ_j – ограниченные промежутки, т.е. точки, отрезки, интервалы или полуинтервалы.

Задача 4. Пусть f – непрерывная на $[a,b]$ функция.

(a) Докажите, что для всякого $c \in [a,b]$ верно равенство $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

(b) Докажите, что найдется $c \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

(c) Докажите, что $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

Покажите, что если функция F непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, то имеет место формула Ньютона–Лейбница $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Приведите пример дифференцируемой функции, у которой производная не является интегрируемой по Риману функцией.

(d) Пусть f, g – непрерывно дифференцируемые функции. Выведите формулу интегрирования по частям: $\int_a^b fg'\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b gf'\,dx$.

(e) Пусть f – непрерывная функция, а φ – непрерывно дифференцируемая функция. Выведите формулу замены переменных: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Задача 5. Найдите:

(a) $\displaystyle\int_{1/10}^{10} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx$, где f – непрерывна на $[0,1]$ и $f > 0$,

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$, где f – непрерывна на $[-1,1]$ и $pf(x) + qf(-x) = 1$, $p+q \neq 0$.

Задача 6. Пусть $f > 0$ – непрерывная функция. Найдите $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 f^p\,dx\right)^{1/p}$.

Задача 7. Пусть ψ – непрерывно дифференцируемая выпуклая функция на $\mathbb{R}$, f – непрерывная функция и $f \geq 0$. Докажите неравенство Йенсена:

$$\psi\Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big) \leq \int_0^1 \psi(f(x))\,dx.$$

Можно ли ослабить условия так: ψ – выпуклая функция и f – интегрируемая функция?

Задача 8. Пусть $p, q > 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Докажите неравенства Гёльдера и Минковского:

$$\int_a^b |f||g|\,dx \le \Big(\int_a^b |f|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b |g|^q\,dx\Big)^{1/q}, \Big(\int_a^b |f+g|^p\,dx\Big)^{1/p} \le \Big(\int_a^b |f|^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |g|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Задача 9. Пусть $f : [1; +\infty) \to (0; +\infty)$ — монотонно убывающая непрерывная функция. Докажите, что ряд $\sum_n f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{M\to\infty} \displaystyle\int_1^M f(x)dx$. Исследуйте сходимость ряда $\sum_n \frac{1}{n^p \ln^q n}$.

Если существует предел $\lim_{M\to\infty} \displaystyle\int_a^M f(x)dx$, то говорят, что f интегрируема на $[a, +\infty)$ в несобственном смысле и значение предела обозначают через $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Мерой или длиной промежутка (интервала, отрезка, полуинтервала) с концами a и b называем число $|b-a|$ и пишем

$$\lambda((a,b)) = \lambda((a,b]) = \lambda([a,b)) = \lambda([a,b]) := |b-a|.$$

Мера конечного объединения промежутков, которые если и пересекаются попарно друг с другом, то только концами, равна сумме длин этих промежутков. Всякое открытое множество U можно представить в виде объединения не более чем счетного набора непересекающихся интервалов, т.е. $U = \sqcup_k (\alpha_k, \beta_k)$. Далее полагаем $\lambda(U) = \sum_k \lambda((\alpha_k, \beta_k))$.

Задача 10.

(a) Докажите, что если $U = \bigcup_n U_n$, где U_n – попарно непересекающиеся открытые множества из некоторого интервала (a,b), то $\lambda(U) = \sum_n \lambda(U_n)$. Более того, если $U \subset \bigcup_n U_n$, где открытые множества U_n уже могут пересекаться, то $\lambda(U) \le \sum_n \lambda(U_n)$.

(b) Пусть U_n – последовательность вложенных ($U_{n+1} \subset U_n$) открытых множеств из некоторого интервала (a,b), причем $\cap_n U_n = \emptyset$. Докажите, что $\lambda(U_n) \to 0$.

Задача 11. Пусть f – неотрицательная функция на $[a,b]$. Докажите равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda\Big(\{x\colon f(x) > t\} \cap (a,b)\Big)\,dt$$

(a) для функции $f = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{\Delta_j}$, где $\{\Delta_j\}$ – разбиение отрезка $[a,b]$,

(b) для непрерывной на $[a,b]$ функции f.

(c) Докажите для непрерывной неотрицательной функции f неравенство Чебышёва:

$$\lambda\Big(\{x\colon f(x) > A\} \cap (a,b)\Big) \le \frac{1}{A}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Задача 12. Пусть последовательность f_n непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ равномерно ограничена и поточечно сходится к нулю.

(a) Докажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ верно равенство

$$[a,b] = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n>N} \{x\colon |f_n(x)| \le \varepsilon\}.$$

(b) Докажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N и открытое множество U такие, что $\lambda(U) < \varepsilon$ и $|f_n(x)| \le \varepsilon$ для всех $n > N$ и всех $x \in [a,b] \setminus U$.

(c) Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 0.$$